

**PEDAGOGICKÁ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ZÁVĚREČNÁ PRÁCE PROGRAMU  
CELOŽIVOTNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

# **Goniometrické funkce očima fyziky**

RNDr. Marek Scholz, Ph.D.

vedoucí práce: JUDr. Mgr. Filip Beran, Ph.D.  
studijní program: Program CŽV na výkon povolání  
studijní obor: Matematika - rozšiřující

Neratovice, 2023

**Anotace:** Cílem práce je prozkoumat možnosti vedení výkladu goniometrických funkcí na základě fyzikálních motivací a představ a poskytnout méně běžný fyzikální pohled na některá tradiční témata středoškolské matematiky. Důraz je kladen na vizuální komunikaci formou obrázků, schemat a grafů. Předkládaná práce je určena především středoškolským učitelům matematiky, kteří mají druhý aprobační předmět jiný než fyziku, a poskytuje jim přehled uplatnění goniometrických funkcí ve středoškolské fyzice. Práce se snaží klást důraz na některé motivy, které jsou ve standardních učebnicích matematiky spíše na okraji. Věnuje se konceptům jako průmět, tok plochou, prudkost změny funkce, fázor, sčítání sinusovek, vzorce součet-součin, aproximace goniometrických funkcí a další. Zdůrazňuje také souvislost mezi goniometrickými funkcemi a otáčivým pohybem. Způsob výkladu je veden záměrně spíše neformálně a pro zpestření využívá beletristického prvku ve formě průvodců Dory a Karla.

**Klíčová slova:** goniometrické funkce, středoškolská fyzika

**Poděkování:** Rád bych tímto poděkoval vedoucímu práce JUDr. Mgr. Filipu Beranovi za návrh tématu a cenné připomínky v průběhu psaní práce. Děkuji také své ženě Veronice, která tolerovala, že se v průběhu dovolené zabývám psaním, namísto abych se věnoval rodině. Nakonec děkuji své dceři Doře za mnoho radosti a rozptýlení, a zároveň se jí tímto omlouvám, že jsem s ní během jejích prvních čtyř měsíců života nemohl trávit více času. Rád bych jí proto tuto práci věnoval s přáním, aby do ní za 16 let nahlédla.

Prohlašuji, že jsem tuto závěrečnou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

Prohlašuji, že odevzdaná elektronická verze bakalářské práce je identická s její tištěnou podobou.

V Neratovicích dne 16. dubna 2023

Marek Scholz

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Rešerše učebnic matematiky</b>	<b>4</b>
2.1	Goniometrické funkce v časových plánech gymnázií	4
2.2	Struktura látky v učebnicích matematiky	4
2.3	Fyzikálně motivované pasáže v gymnaziálních učebnicích	5
2.3.1	Prometheus – Goniometrie	5
2.3.2	Prometheus – Goniometrie sbírka	5
2.3.3	Didaktis – pracovní sešit	5
2.3.4	Didaktis – učebnice	6
2.4	Shrnutí	6
2.5	Další zdroje	7
<b>3</b>	<b>Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku</b>	<b>8</b>
3.1	Měření úhlů	8
3.2	Zavedení goniometrických funkcí jako poměrů stran v pravoúhlém trojúhelníku	8
3.3	Inverzní funkce	13
<b>4</b>	<b>Užití goniometrických funkcí ostrého úhlu ve fyzice</b>	<b>15</b>
4.1	Průmět	15
4.2	Práce	15
4.3	Moment síly	16
4.4	Zatížení lan a konstrukcí	16
4.5	Nakloněná rovina	17
4.6	Šikmý vrh	19
4.7	Zákon lomu	20
4.8	Proton v magnetickém poli	22
4.9	Osvětlení plochy	23
4.10	Tok plochou	24
<b>5</b>	<b>Zavedení funkcí sinus a kosinus pro obecný úhel</b>	<b>25</b>
5.1	Jednotková kružnice	25
5.2	Polární souřadnice	26
5.3	Parametry otáčivého pohybu	26
5.4	Graf funkce sinus	28
5.5	Fázory	29
5.6	Prudkost kopce sinus	29
5.7	*Rychlost a zrychlení na kolotoči	31
5.8	Sinus, kosinus a tangens malíčkých úhlů	32
<b>6</b>	<b>Goniometrické vzorce</b>	<b>35</b>
6.1	Základní vztahy	35
6.2	Součtové vzorce	35
6.3	Vzorce součet-součin	37
6.4	*Prudkost kopce sinus podruhé	38
6.5	Tabulka důležitých goniometrických vzorců	40
<b>7</b>	<b>Fyzikální a jiné aplikace</b>	<b>41</b>
7.1	Střídavý proud	41
7.1.1	Elektromagnetická indukce	41
7.1.2	Napětí v zásuvce	42
7.1.3	Fázové a sdružené napětí	43
7.2	Vlnění	43
7.2.1	Rovnice postupné vlny	43
7.2.2	Sčítání vlnění stejné frekvence s fázovým posunem	44
7.2.3	Stojaté vlnění	46
7.2.4	Rázy	48
7.2.5	*Interference na dvojtěrbině	48

7.2.6	Difrakční mřížka . . . . .	52
7.3	Mechanické oscilátory . . . . .	53
7.3.1	Harmonický oscilátor . . . . .	53
7.3.2	Kyvadlo . . . . .	54
7.4	Další aplikace . . . . .	56
7.4.1	Sférické souřadnice . . . . .	56
7.4.2	*p-orbital . . . . .	57
7.4.3	Teploty v Klementinu . . . . .	58
7.4.4	Příliv a odliv . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>62</b>
<b>9</b>	<b>Použitá literatura</b>	<b>63</b>

# 1 Úvod

Goniometrické funkce jsou kapitolou středoškolské matematiky, která má pravděpodobně nejvíce styčných ploch se středoškolskou fyzikou. Neznalost goniometrie studenty ve fyzice limituje a často bývá příčinou nezdaru. Na druhé straně fyzika poskytuje mnoho hezkých aplikací pro goniometrické funkce, na kterých učitel matematiky může demonstrovat užitečnost látky. Spolupráce mezi vyučujícím matematiky a fyziky tak může být mimořádně užitečná. Analýza učebnic však ukázala, že provázání fyziky do stávajících učebnic matematiky je spíše slabé.

Předkládaná práce je určena především učitelům matematiky na všeobecných gymnáziích, kteří mají druhý aprobační předmět jiný než fyziku, tedy např. kombinace matematika + biologie, matematika + tělesná výchova atp. Cílem této práce je těmto učitelům poskytnout přehled uplatnění goniometrických funkcí ve středoškolské fyzice. Učitelé pak budou moci lépe využít synergie a vazeb mezi těmito dvěma předměty. V neposlední řadě také mohou studentům ukázat praktické aplikace této látky, která někdy bývá pojímána dosti formálně. Práce tak může učitelům sloužit jako doplněk k učebnici matematiky. Zároveň je ale práce psána takovým způsobem, aby ji nebo její části mohli samostatně číst i středoškolští studenti.

V práci je postupně budován matematický aparát s neustálým zřetelem na aplikace ve fyzice. Výklad matematiky je hojně prokládán fyzikálními motivacemi a problémy, se kterými se student setkává v průběhu středoškolského studia fyziky. Práce se nesnaží podávat striktně matematicky rigorózní výklad. Naopak je formální matematická stránka záměrně upozaděna. Cílem práce ani není poskytnout ucelený učebnicový výklad. Mohou tak chybět některá témata a napojení kapitol nemusí být plynulé.

V práci se objevuje několik výraznějších motivů, které jsou dle mého názoru ve standardních učebnicích poněkud zanedbány. V první části je velký důraz kladen na *využití koncepce průmětu*. Moje učitelská praxe ukazuje, že i po absolvování kurzu goniometrie mají studenti velké problémy i v těch nejjednodušších fyzikálních situacích využívat rozkladu vektoru do dvou kolmých směrů a následně pomocí goniometrických funkcí vyjadřovat vztah mezi stranami ve vzniklém trojúhelníku.

Druhým výrazným motivem je *propedeutika pojmu derivace*. Domnívám se, že goniometrické funkce jsou k tomu velmi vhodné. V práci je tedy na několika místech neformálně budován koncept derivace. Praxe totiž ukazuje, že studenti po průchodu kurzem diferenciálního počtu sice umí počítat lečjaké matematické příklady, ale jejich dovednost je často jen formální.

Krátce zde shrnu zaměření jednotlivých kapitol práce:

- Kapitola 2 podává rešerši současných široce používaných středoškolských učebnic goniometrie z pohledu využívání fyzikálních motivací a příkladů.
- Kapitola 3 zavádí goniometrické funkce jako poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku a poskytuje úvodní výklad vedený převážně standardním způsobem.
- Kapitola 4 ukazuje, v jakých typických kontextech se student setkává s goniometrickými funkcemi v pravoúhlém trojúhelníku v rámci předmětu fyzika. Klíčovou roli hrají pojmy průmět a rozklad vektoru do dvou kolmých směrů. Je také zaveden pojem tok plochou.
- Kapitola 5 rozšiřuje definiční obor goniometrických funkcí na celá reálná čísla. Výklad začíná více méně standardně jednotkovou kružnicí, ale oproti zkoumaným učebnicím dále daleko více využívá fyzikální představy otáčivého pohybu. Tato kapitola se také snaží neformálně budovat pojem prudkost (derivace) funkce opět na základě fyzikálních představ. Nakonec jsou rozebrány aproximace v případě malých úhlů, které se ve fyzice hojně využívají.
- Kapitola 6 odvozuje běžné goniometrické vzorce v zásadě standardním způsobem, ovšem se zřetelem na grafickou představu.
- Kapitola 7 je v práci stěžejní a představuje škálu fyzikálních aplikací a témat, se kterými se student na střední škole setkává. Zejména jsou to pro fyziku klíčová témata vlnění a kmitání. Častým matematickým motivem je pak sčítání sinusovek s hojným využitím vzorců součet-součin, které jsou v učebnicích matematiky spíše na okraji pozornosti. V poslední podkapitole je několik méně tradičních aplikací, se snahou navést studenta i na pokročilá témata, jako např. Fourierova analýza nebo práce s daty.

Veškerá předkládaná témata jsou vyložena středoškolským aparátem. Nicméně kapitoly, které obsahují určité komplikovanější úvahy, jsou označeny hvězdičkou.

Cílem práce je prozkoumat možnosti vedení výkladu goniometrických funkcí na základě fyzikálních motivací a představ a poskytnout méně běžný fyzikální pohled na některá tradiční témata středoškolské matematiky. Práce se snaží nahlédnout téma goniometrických funkcí jako celek, z čehož vyplývá poněkud větší rozsah. Vzhledem k tomu, že tato závěrečná práce není ani bakalářská ani magisterská, využívá možnosti volnějšího formátu a dovoluje si pracovat kreativně jak s formou, tak s obsahem. Práce se také snaží

se čtenářem co nejvíce komunikovat vizuálně formou obrázků, schemat a grafů. Za tímto účelem bylo vytvořeno množství vlastních obrázků, které čtenáři mohou případně použít ve výuce. Aby práce mohla přinést nový náhled na některé aspekty středoškolské výuky, rozhodl jsem se strukturu a obsah práce tvořit samostatně, namísto čerpání z dostupných učebnic. V neposlední řadě práce zařazuje beletristický prvek ve formě vypravěčů Dory a Karla za účelem oživení výkladu.

## 2 Rešerše učebnic matematiky

### 2.1 Goniometrické funkce v časových plánech gymnázií

V následujícím budu uvádět číslování ročníků osmiletého gymnázia, ale samozřejmě se to týká i čtyřletých programů. Goniometrické funkce bývají ve školních vzdělávacích programech matematiky (ŠVP) na gymnáziích řazeny většinou do druhé půlky sexty. Základní poznatky o goniometrických funkcích a poměrech stran v pravoúhlém trojúhelníku však žáci často získají už v kvartě. To je důležité pro předmět fyzika, protože v kvintě se tradičně začíná mechanikou, kde se goniometrické funkce vyskytují velmi hojně. Postrachem studentů bývá pohyb na nakloněné rovině, což je krásné téma na procvičení goniometrických funkcí. Bohužel studenti v první půlce kvinty už často z hlavy vytěsnili dovednosti nabyté v kvartě během matematiky a řešení fyzikálních úloh jim pak dělá nemalé potíže.

Největší uplatnění však goniometrické funkce nacházejí v tématu kmitání a vlnění, což je téma, které se prolíná celou fyzikou. To v ŠVP bývá často plánováno na druhou půlku sexty, tedy na podobný čas, kdy se probírá goniometrie v matematice. Je velkou chybou, pokud z různých důvodů dojde k tomu, že je kmitání a vlnění ve fyzice probíráno dříve než goniometrické funkce v matematice. Fyzikální koncepty pak prakticky není možné studentům předat kvůli chybějícímu matematickému aparátu. Ve fyzice se řeší modelový případ pohybu závaží na pružině a souvislost mezi jeho polohou, rychlostí a zrychlením. Je to vhodný moment pro propedeutiku pojmu derivace. Učitelé matematiky a fyziky na dané škole by tedy měli spolupracovat při časovém plánování této látky.

V septimě ve fyzice pokračují témata s hojným využitím goniometrických funkcí – zejména střídavý proud, paprsková optika, vlnová optika (elektromagnetické vlnění). Tou dobou by studenti již měli mít jistou zručnost při práci s goniometrickými funkcemi. V oktávě se v rámci seminářů matematiky probírá diferenciální počet a tedy i derivace goniometrických funkcí. Zde je opět krásný styčný moment s fyzikou, kdy je možné dovednosti o derivování funkcí využít k odvození vztahů pro pohyb harmonického oscilátoru (ve fyzikálním semináři).

### 2.2 Struktura látky v učebnicích matematiky

Bylo srovnáno řazení kapitol a vedení výkladu ve třech učebnicích. První dvě jsou velmi hojně využívány v českých školách, zatímco třetí učebnice je slovenská a vede výklad méně běžným způsobem:

- (UP) Goniometrie, Matematika pro gymnázia, Prometheus [1, 2]
- (UD) kapitola Goniometrie, Funkce II, Matematika pro SŠ, Didaktis [3, 4]
- (US) Matematika pre 3. ročník gymnázia 2. časť, Slovenské pedagogické nakladateľstvo [5]

UP a UD vedou výklad podobným způsobem. Nejprve jsou zavedeny goniometrické funkce ostrého úhlu na základě poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku. Dále je představena jednotková kružnice, oblouková úhlová míra a orientovaný úhel. Odtud je pak provedeno rozšíření definice goniometrických funkcí z ostrého úhlu na obecný úhel, kdy je hodnota goniometrických funkcí  $\sin$  a  $\cos$  ztotožněna se souřadnicemi  $y, x$  bodu na jednotkové kružnici. Následuje kapitola o grafech goniometrických funkcí, protože předchodí ztotožnění umožňuje snadno ilustrovat, jak vznikají tvary těchto grafů. Důležitou podkapitolou je vyšetřování, jaký vliv mají různé parametry funkce  $A \sin(bx + c) + d$  na vzhled grafu funkce. Poté je uvedena kapitola o goniometrických rovnicích a nerovnicích, přičemž součástí je zavedení inverzních goniometrických funkcí. Posledním tématem jsou goniometrické vzorce, s důrazem kladeným zejména na identitu  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  a na součtové vzorce.

Učebnice US má zjevně ambice látku vykládat novým způsobem a její řazení je proto poněkud odlišné. Goniometrické funkce jsou zařazeny na konec prvního dílu pro septimu. Kapitola je relativně krátká (27 stran). Větší prostor je věnován souvislosti mezi kartézskými a polárními souřadnicemi. Klíčový přechod k rozšíření goniometrických funkcí na obecný úhel je pak opět proveden pomocí souřadnice bodu na jednotkové kružnici. Je zajímavé, že se US téměř nevěnuje analýze, jak parametry ovlivňují graf funkce sinus, a nijak se nezabývá goniometrickými vzorci, jako třeba vzorci součtovými. Na konci druhého dílu pro septimu je pak kapitola Měření, kde autoři dopodrobna rozebírají různé zejména historické metody určování výšek a vzdáleností za pomoci goniometrie, a věnují se také aproximacím.

## 2.3 Fyzikálně motivované pasáže v gymnaziálních učebnicích

V učebnicích zmíněných v minulé kapitole byl proveden průzkum pasáží a úloh s fyzikální tematikou. Výpis nalezených částí textu se vztahem k fyzice je uveden dále. Tyto části textu zde nejsou přímo přesně citovány, nýbrž jsou často uvedeny ve zhuštěné a stručnější formě.

### 2.3.1 Prometheus – Goniometrie

1. cvičení: Ramena nosníku svírají úhel  $45^\circ$  a na jeho konci je zatíženo břemenem o tíze  $G = 800\text{ N}$ . Stanovte velikost tahové a tlakové síly působící na jednotlivá ramena.
2. řešená úloha: Na skleněnou destičku tloušťky  $d$  dopadá světelný paprsek pod úhlem  $\alpha$ . Určete velikost posunutí paprsku po průchodu destičkou, která má index lomu  $n$ .
3. cvičení: Sílu o velikosti  $F = 465\text{ N}$  rozložte na dvě složky, aby s ní svíraly úhel  $69^\circ 30'$  a  $74^\circ 10'$ . Vypočítejte velikosti složek.

### 2.3.2 Prometheus – Goniometrie sbírka

1. Síly o velikostech  $125\text{ N}$  a  $75\text{ N}$ , které mají společné působíště, svírají úhel o velikosti  $50^\circ$ . Určete velikost výslednice.
2. Těleso o hmotnosti  $1563\text{ kg}$  je zavěšeno dvěma lany různých délek na vodorovném trámu. Lana svírají s trámem úhly o velikostech  $48^\circ 26'$  a  $62^\circ 54'$ . Vypočítejte namáhání lan v tahu.
3. Jak velká síla je třeba, abychom po rampě se sklonem  $18^\circ 40'$  vytlačili těleso tíhy  $420\text{ N}$ ? Jak velká tlaková síla přitom působí na rampu?

### 2.3.3 Didaktis – pracovní sešit

1. Paralaxa: Rovníková paralaxa je úhel, pod kterým je z daného tělesa pozorován rovníkový poloměr Země. Pro Slunce je  $8,79''$  a pro Měsíc ve střední vzdálenosti  $57^\circ 2,5''$ . Vyjádřete v radiánech.
2. Ve spisu Aristarcha ze Samu (3.st př.n.l.) je popsána metoda pro výpočet poměru vzdáleností Slunce a Měsíce od Země. Ve chvíli, kdy je vidět přesně polovina Měsíce, je změřen úhel mezi spojnicí Země-Měsíc a Země-Slunce, který činí  $\alpha = 1,568\text{ rad}$ . Vyjádřete ve stupních a minutách.
3. Úhlová rychlost: při popisu rovnoměrného pohybu po kružnici se zavádí úhlová rychlost  $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ , kde úhel měříme v rad a čas v sekundách. Určete: a) úhlovou rychlost kolotoče, pokud vykoná 5 otoček za  $20\text{ s}$ ; b) o jaký úhel ve stupních se otočí kolotoč za  $2\text{ s}$ , pokud jeho úhlová rychlost je  $0,5\text{ rad/s}$ ; c) Jaká je doba jedné otočky kola, jehož úhlová rychlost je  $5\pi\text{ rad/s}$
4. Fréza se otočí  $3000\times$  za minutu. a) Za jak dlouho se otočí o  $180^\circ$ ? b) O jaký úhel se otočí za  $0,04\text{ s}$ ?
5. Závaží na pružině kmitá tak, že jeho výchylka z rovnovážné polohy (v metrech) je dána vztahem  $y = 0,1 \sin \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{6}$ . a) Určete výchylku v centimetrech po  $20\text{ s}$  kmitání. b) Určete maximální možnou výchylku v centimetrech.
6. v zásuvce je střídavé napětí, jehož okamžitá hodnota ve voltech je dána vztahem  $u = 325 \cdot \sin(100\pi t)$  (čas dosazujeme v sekundách). Určete okamžité hodnoty napětí v časech  $2\text{ ms}$  a  $5\text{ ms}$ .
7. Pokud budeme sledovat papír z běžné čtecí vzdálenosti  $d = 25\text{ cm}$ , tak zdravé oko bude schopno rozlišit dva body, které jsou od sebe aspoň  $y = 0,072\text{ mm}$  (pokud budou blíže, tak nám splynou v jeden bod). Úhel bod1-oko-bod2 nazveme zorným úhlem  $\tau$  a platí pro něj  $\tan \tau = y/d$ . Určete velikost tohoto zorného úhlu, který se také nazývá rozlišovací schopnost oka.
8. Tělesná teplota zdravého člověka se během dne mění a lze ji přibližně popsat vztahem  $T = 36,8 - 1,3 \sin[\frac{\pi}{12}(t - 2)]$ , kde  $t$  je čas v hodinách po půlnoci a teplota vychází ve stupních Celsia. a) v kolik hodin má člověk teplotu  $36,8\text{ C}$ ? b) v kolik hodin má nejvyšší a nejnižší teplotu? c) Určete hodnotu nejvyšší a nejnižší teploty.
9. Zrychlení tělesa při klouzání po nakloněné rovině je dáno vztahem

$$a = g \sin \alpha - fg \cos \alpha$$

kde  $\alpha$  je sklon roviny,  $f$  koeficient smykového tření (typicky  $f \in (0, 1)$ ) a  $g$  gravitační zrychlení. Určete, pro jaký sklon  $\alpha$  těleso klouže rovnoměrným pohybem, tedy bez zrychlení, pokud  $f = 0,35$ .

10. Okamžitá rychlost kmitavého pohybu je dána rovnicí

$$v = 0,75 \cos(4\pi t - \pi/4).$$

a) určete frekvenci kmitů v Hz ( $s^{-1}$ ). b) Určete dobu, za kterou bude poprvé dosaženo maximální rychlosti, c) určete, kdy poprvé od začátku pohybu je rychlost nulová.

11. Zákon lomu světla na rozhraní dvou prostředí (např. sklo a vzduch) je vyjádřen rovnicí  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ , kde  $\alpha_1, \alpha_2$  jsou po řadě úhel dopadu a úhel odrazu a  $n_1, n_2$  indexy lomu prostředí. Pokud paprsek míří ze skla do vzduchu, tak pro určitý úhel  $\alpha_{1,m}$  dojde k tomu, že zlomený paprsek sleduje rozhraní. Tento úhel nazveme mezním úhlem. Pokud by úhel dopadu byl větší než mezní úhel, tak paprsek do vzduchu vůbec nevystoupí a na rozhraní dojde k tzv. totálnímu odrazu zpět do prostředí skla. Určete hodnotu mezního úhlu při dopadu paprsku na rozhraní sklo-vzduch, jejichž indexy lomu jsou po řadě 1,56 a 1,00.

### 2.3.4 Didaktis – učebnice

1. Astroláb – pomocí úhlů byly změřeny relativní vzdálenosti planet sluneční soustavy, což bylo základem Koperníkova heliocentrického názoru a Keplerových zákonů pohybu. v současné době Hubbleův teleskop měří úhly s přesností setiny úhlové vteřiny.
2. Perioda ve fyzice označuje dobu trvání jednoho opakování periodického děje, tedy dobu, než se systém dostane opět do původního stavu.
3. Z fyziky známe periodické děje, které mají sinusový průběh, např. výchylka kyvadla nebo závaží na pružině.
4. Fyzici by řekli, že koeficient  $a$  má vliv na takzvanou amplitudu – maximální hodnotu výchylky.
5. Fyzici by hovořili o tom, že koeficient  $q$  má vliv na frekvenci, to jest počet opakování děje za sekundu.
6. Průběh střídavého proudu v zásuvce můžeme popsat funkcí sinus. Grafy na obrázku pak odpovídají časovému průběhu velikosti proudu po usměrnění takzvaným dvoucestným usměrňovačem (Graetzův můstek).
7. Když položíme na nakloněnou rovinu předmět a zvětšujeme úhel náklonu  $\alpha$ , tak při určité hodnotě  $\alpha_0$  dojde k tomu, že předmět začne klouzat dolů. Pokud koeficient tření mezi předmětem a rovinou je  $f$ , pak pro tento mezní úhel náklonu platí  $\tan \alpha = f$  (uvedeno bez zdůvodnění).
8. Funkce  $\cot$  jde využít při výpočtu výšky, do které vystoupí těleso, které klouže směrem vzhůru po nakloněné rovině, přičemž mělo počáteční rychlost  $v_0$ :

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f \cot \alpha)}$$

(uvedeno bez zdůvodnění)

9. Je uvedena fyzikálně důležitá aproximace  $\sin x \approx x \approx \tan x$  pro malá  $x$ .
10. Vztah  $F = Q(\tan \alpha - \mu)$  vyjadřuje sílu, která je potřeba k povolení šroubu se stoupáním závitu  $\alpha$ , přičemž je šroub zatížen silou o velikosti  $Q$  a mezi materiále šroubu a závitu je koeficient tření  $\mu$ . Mohli bychom pak pomocí goniometrické rovnice počítat, jaké stoupání musí mít šroub, abychom ho povolili určitou danou silou  $F$ :

$$\tan \alpha = \frac{F}{Q} + \mu.$$

11. Předpisem  $y = y_m \sin(\frac{2\pi}{T}t)$  je popsán harmonický pohyb. Zjistujeme-li, v jakém čase nabývá výchylka určité hodnoty, tak řešíme goniometrickou rovnici s neznámou  $t$ .

## 2.4 Shrnutí

Největší snahu o propojení s fyzikou má zjevně učebnice UD, kde je řada odkazů do fyziky, i když jejich výběr není dokonalý a někdy působí nedotaženě. Přesto v tomto ohledu zaslouží uznání. UP nabízí jen velice málo styčných bodů s fyzikou, což je trochu překvapivé vzhledem k tomu, že nakladatelství vydalo i řadu gymnaziálních učebnic fyziky. UP například ani nezavádí pojem frekvence. Slovenská učebnice US, ač jinak svěží a zaměřená na praxi, nenabízí fyzikální tematiku téměř vůbec. Tento průzkum odhalil, že propojení gymnaziální matematiky s fyzikou je na úrovni zkoumaných učebnic spíše slabé.



## 2.5 Další zdroje

Kromě zmíněných učebnic byla provedena rešerše závěrečných prací zabývajících se aplikací goniometrických funkcí ve fyzice. Nejbližší k tématu předložené práce má bakalářská práce Františka Hanzlíka z roku 2021 [6], která se však spíše zaměřuje na řešení složitějších případů typických fyzikálních problémů, nikoli na fyzikálně motivovaný výklad matematických témat (nutno však podotknout, že uvedená práce nebyla obhájena). Podrobný rozbor goniometrických funkcí a jejich aplikací v elementární matematice nalezneme v dizertační práci Radky Smýkalové [7], která byla dále rozvedena do monografie. Fyzikální aspekty této práce byly konzultovány s knihami [8, 9, 10]. Inspirace ohledně beletristického prvku pochází ze skvělé populárně naučné knihy o moderní fyzice *Pan Tompkins stále v řešení divů* [11].

## 3 Goniometrické funkce v pravouhlém trojúhelníku

### 3.1 Měření úhlů

*Karel měl po tréninku a velice unavený a hladový se ploužil po náměstí směrem domů. V tom ale uviděl Doru, jak sedí na okraji kašny a jí pizzu, kterou má v krabici. Moc se spolu neznají, ale Dorka mu lehce zamávala na pozdrav. Karel také kývnul a šel dál, Dora má však oči jako ostrůž a neuniklo jí, jak Karel lačně koukal na její pizzu. Dáš si? Zavolá ještě za Karlem. Karel se překvapeně otočí a chvíli mu to šrotuje. Ale jo, rád si dám. Jo a jinak já sem Karel, řekl a nesměle napřáhnul ruku. Dorka mu ji stiskla. Já jsem Dora. Viděla jsem, jaký máš hlad a já bych tu pizzu asi stejně sama nesnědla. Dáš si jednu osminu, šedesát stupňů nebo jeden radián? Mám tady různé velké kousky. Cože? Karel na ni překvapeně vzhlednul a Dorka se mu bez hnutí brvy jen zopakovala stejnou otázku. . . Co by měl Karel odpovědět, aby se nejmíc najedl?*

Velikost kousku pizzy můžeme definovat pomocí úhlu. U pizz a koláčů jsme zvyklí říkat čtvrtina nebo osmina. Velikost úhlu bychom tedy mohli určit nějakým zlomkem nebo číslem, kde 1 znamená celý kruh kolem dokola. V případě určování velikosti úhlu je ale běžnější používat stupně, kde celý kruh kolem dokola je  $360^\circ$ .

*Karle, přemýšlel jsi někdy o tom, proč celý kruh kolem dokola má zrovna  $360^\circ$ ? Proč ne třeba  $100^\circ$ ? No, to nepřemýšlel, pomyslel si v duchu Karel a poprvé ve svém krátkém životě se nad tím poctivě zamyslel. Myslím, že takhle to ale už bude asi dlouho, možná od starověku. Máš pravdu, je to tak už od Babyloňanů, používali totiž šedesátkovou soustavu – třeba hodinu rozdělili na 60 minut. A proč tedy celek není  $60^\circ$ ? Počkej, nemá to něco do činění s tím, že rok má 365 dnů? Proč by pak ale celek nebyl rozdělen do 365? Ono 360 je totiž mnohem hezčí číslo než 365. Proč hezčí, čísla přeci nejsou hezká nebo ošklivá? Zavrtěl Karel nechápavě hlavou. Číslo 360 má mnohem vyšší dělitelnost, má totiž 24 dělitelů, zatímco 365 jen čtyři dělitele. Proto také používali šedesátkovou soustavu a dvanáctkovou, protože to jsou čísla s vysokou dělitelností, poučila ho Dora. No dobře, uznávám tedy, že 360 je dobrý počet dílků, i když by tedy ten počet dílků klidně mohl být jiný, je to čistě lidská volba. Jsem ráda, že to říkáš. Je totiž ještě jeden chytrý způsob, jak měřit úhel. Dobře, je jasné, že osmina pizzy je  $45^\circ$ , takže  $60^\circ$  je větší kousek pizzy. Ale co je to ten jeden radián?*

Jeden radián je taková speciální velikost úhlu, krásná velikost. Kousek pizzy s úhlem jeden radián má totiž všechny strany stejně dlouhé – tedy kulatá strana je stejně dlouhá jako ty obě rovné strany. Tuhle vlastnost má rovnostranný trojúhelník, kde je úhel  $60^\circ$ . Pizza má ale kulatou stranu a taková je vždy trochu delší než rovná strana, takže odpovídající úhel je o kousek menší než  $60^\circ$ . Celá pizza je kruh, který má poloměr  $r$ . Výseč s úhlem 1 radián pak má oblouk o délce stejně jako je poloměr kruhu  $r$ . Odtud pochází název radián – *radius* totiž znamená poloměr. Obvod celé pizzy je  $o = 2\pi r$ , takže oblouků o délce  $r$  se na obvod vejde  $2\pi$ . Do celého kruhu se tedy vejde  $2\pi$  radiánů.

*Karle, tak už víš, jestli si vezmeš  $60^\circ$  nebo 1 radián? Zase takový hlad nemám, tak si tedy vezmu jen 1 radián. Vidím, že už tomu rozumíš. Uměl bys tedy říct, kolik radiánů je  $150^\circ$  a kolik stupňů jsou 2 radiány?*

Ve fyzice je měření úhlu v radiánech velice výhodné, mimo jiné díky tomu, že když se nějaké těleso pohybuje po kružnici o poloměru  $r$  a my víme, o jaký úhel okolo středu kružnice se otočilo v radiánech, tak snadno určíme dráhu, jako po obvodu urazilo:

$$s = \varphi r.$$

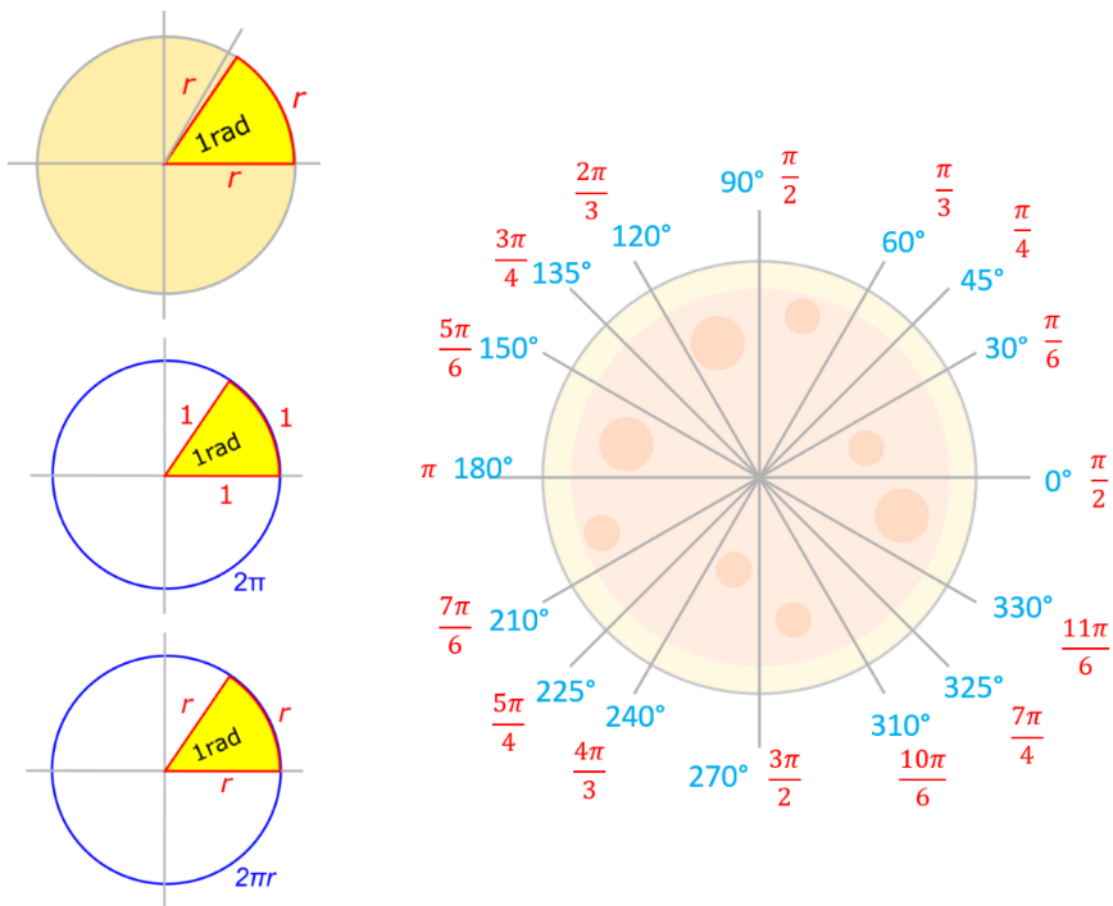
Nebo třeba veličina úhlová rychlost  $\omega$ , která vyjadřuje úhel uražený v radiánech za 1 sekundu a má tak jednotku rad/s. Pro rychlost, kterou se bod pohybuje po obvodu kružnice, pak platí vztah

$$v = \omega r.$$

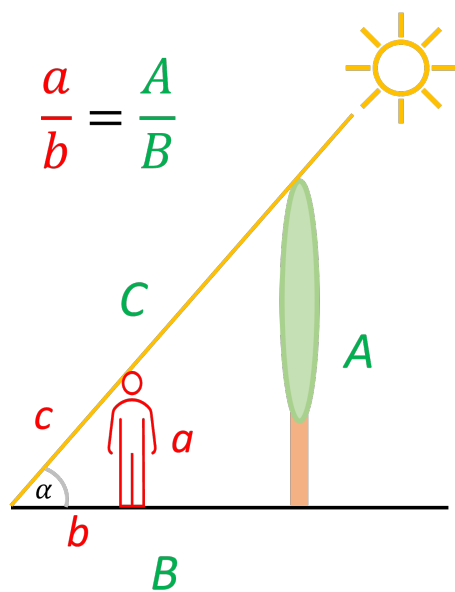
Když používáme k měření velikosti úhlu radiány, tak jsou fyzikální vztahy hezčí a jednodušší. To se ukáže i později v tomto textu. Pokud má kružnice poloměr  $r = 1$ , tak délka oblouku  $s$  odpovídá úhlu o velikosti rovněž  $s$  (v radiánech). Proto se radiánům také říká oblouková míra – určujeme velikost úhlu přímo pomocí délky oblouku kružnice.

### 3.2 Zavedení goniometrických funkcí jako poměrů stran v pravouhlém trojúhelníku

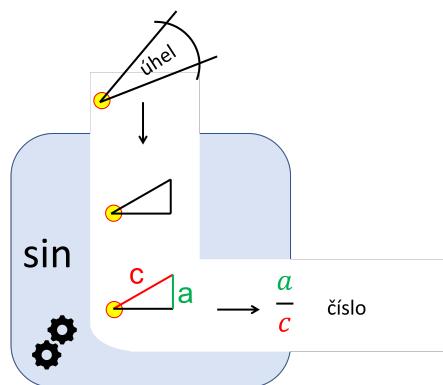
*Je parné letní odpoledne a Dora s Karlem se chladí ve stínu vysokého topolu. Doro, jak myslíš, že je ten topol vysoký? Ptá se Karel. Dorka na chvíli zkrabatí obličej, ale pak odpoví: To nevím, něco mezi pěti a sto metry. Ale umím to změřit! Stačí, když... Karel Dorotku zálibně vyslechl a pomyslel si: Vybral jsem si dobře!... Víte, co mohla Dora Karlovi odpovědět?*



Obrázek 1: Stupně a radiány



Obrázek 2: Stíny a podobné trojúhelníky



Obrázek 3: Funkce sinus jako mechanismus

Jistě vás napadne mnoho způsobů, jako třeba vylézt na vrchol stromu, hodit dolů klíče a měřit, za jak dlouho dopadnou. Nebo stoupnout si k patě stromu a z dálky odhadnout, kolikrát je topol vyšší než člověk. Snad vás napadne i řešení na základě měření délky stínu.

Sluneční paprsky svírají se zemí úhel  $\alpha$ , čímž je definován jeden úhel pravoúhlého trojúhelníku. Trojúhelníky na obrázku 2 jsou vzájemně podobné (shodují se ve velikosti dvou úhlů) a je také patrné, že podobné trojúhelníky mají stejný tvar a pouze jinou velikost. Poměry stran v těchto trojúhelnících jsou proto shodné.

*Dorka je vždy připravena a z kapsy vytáhne svinovací metr. Změří nejprve výšku Karla  $a = 200$  cm (je to čahoun) a pak délku jeho stínu  $b = 150$  cm. Pak změří délku stínu topolu  $B = 18$  m. Jak je tedy topol vysoký?*

Karel je  $a/b = 200/150 = \frac{4}{3} = 1,33 \times$  větší než jeho stín. To samé bude platit pro topol – bude  $\frac{4}{3} \times$  větší než jeho stín. Výška topolu je proto  $A = 18 \times \frac{4}{3} = 24$  m, protože  $A/B = a/b = 4/3$ .<sup>1</sup>

Využili jsme vlastně toho, že poměr stran  $a/b$  v Karlově trojúhelníku je stejný jako poměr stran  $A/B$  v trojúhelníku topolu, protože se jedná o podobné trojúhelníky, a tedy  $a/b = A/B = 4/3$ . Tento poměr stran závisí jen na úhlu  $\alpha$ .

Stejně tak to bude platit i pro další strany trojúhelníku

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}, \quad \frac{a}{c} = \frac{A}{C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{B}{C}$$

Hodnota těchto poměrů závisí jen na úhlu  $\alpha$ , nikoli na velikosti trojúhelníku. V našem případě je délka stínu dlouhá 3 díly a výška objektu 4 díly. Z Pythagorovy věty je potom délka přepony  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  dílů. Můžeme si tak doplnit délku poměrů stran pro náš případ, kdy slunce svítí pod určitým úhlem  $\alpha$ :

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = \frac{4}{3} = 1,33, \quad \frac{a}{c} = \frac{A}{C} = \frac{4}{5} = 0,8, \quad \frac{b}{c} = \frac{B}{C} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Co se bude dít, když se slunce postupně kloní k obzoru, tedy když  $\alpha$  klesá – jak se budou měnit poměry stran v našich trojúhelnících? Výška  $a$  se nemění, zatímco stín  $b$  i přepona  $c$  se budou prodlužovat. Když bude klesat úhel dopadu paprsků, tak poměry  $a/b$  a  $a/c$  budou také klesat. Naproti tomu poměr  $b/c$  poroste. Každému úhlu  $\alpha$  tedy můžeme přiřadit určitou hodnotu poměru stran v pravoúhlém trojúhelníku. Když různým velikostem úhlu  $\alpha$  přiřazujeme čísla  $p$  na základě určitého mechanismu  $\alpha \rightarrow p$ , tak můžeme říci, že číslo  $p$  je funkcí  $\alpha$  a zapsat funkce  $(\alpha) = p$ . V našem případě tyto funkce (mechanismy, jak čísla přiřazovat – obr. 3) nazýváme sinus, kosinus, a tangens a zkracujeme jako sin, cos, tan (či tg).

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

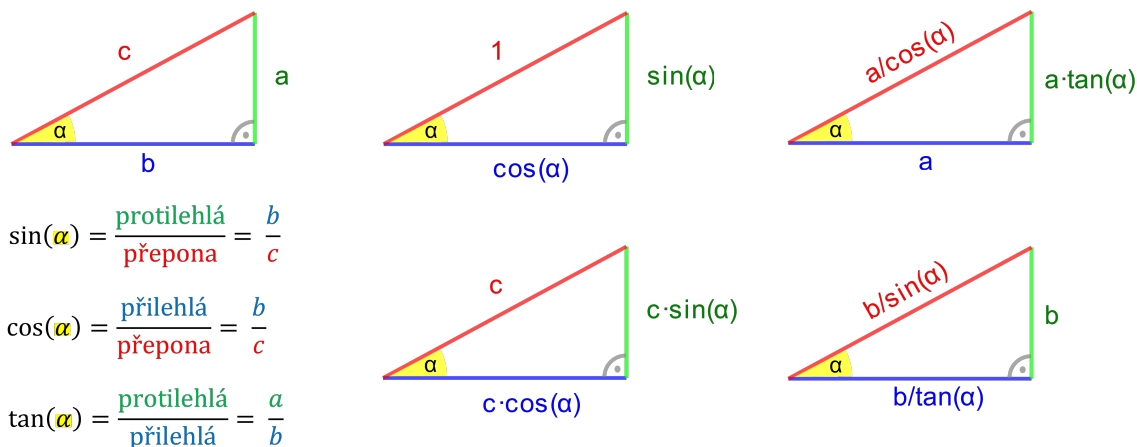
$$\tan \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přílehlá}}, \quad \sin \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{přílehlá}}{\text{přepona}}$$

V případě Dory a Karla paprsky slunce svíraly se zemí úhel  $53^\circ$  a mohli bychom pak psát

$$\tan 53^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přílehlá}} = \frac{4}{3} = 1,33, \quad \sin 53^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{4}{5} = 0,8, \quad \cos 53^\circ = \frac{\text{přílehlá}}{\text{přepona}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

*Je užitečné vědět, jakému úhlu přísluší jaký poměr. Hodnoty poměrů pro některé úhly však dokážeme určit snadno výpočtem. Zvládnete určit hodnoty goniometrických funkcí pro úhly  $0^\circ$  a  $45^\circ$ ?*

<sup>1</sup>Možná vám přijde divné, že by Dora nosila po kapsách svinovací metr. Přijďte ale na to, jak by to snadno mohli udělat i bez něj? Karel pravděpodobně zhruba ví, jak je vysoký –  $a = 200$  cm. Dorka třeba pomocí délky své boty "odstopuje" délku stínu Karla, řekněme  $d = 5$  stop, a poté délku stínu topolu, řekněme  $D = 60$  stop. Délka stínu topolu je  $D/d = 50/4 = 12 \times$  delší než Karlův stín a pokud je Karel vysoký 200 cm, tak výška topolu musí být  $12 \times$  větší, tedy  $A = 24$  m.



Obrázek 4: Délka stran v pravoúhlém trojúhelníku a goniometrické funkce

Pokud je úhel  $\alpha$  velmi malý, prakticky nulový, tak je trojúhelník úplně placatý, protilehlá má nulovou délku ( $b = 0$ ) a přilehlá je vlastně stejně dlouhá jako přepona ( $a = c$ ). Proto

$$\sin 0^\circ = b/c = 0/c = 0, \quad \cos 0^\circ = a/c = a/a = 1, \quad \tan 0^\circ = b/a = 0/a = 0$$

Pokud je  $\alpha = 45^\circ$ , tak jsou odvěsny stejně dlouhé, řekněme o délce 1 ( $a = b = 1$ ) a přepona z Pythagorovy věty  $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . Proto

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^\circ = 1/1 = 1$$

Úhel  $60^\circ$  najdeme v rovnostranném trojúhelníku. Pokud má stranu délky 1, pak pro jeho výšku platí...

*V tom se Dora zarazila, protože ji kolem hlavy začal kroužit zlověstný sršeň. Dokážete to dopovědět místo ní? Jaké jsou hodnoty goniometrických funkcí pro úhly  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  a  $90^\circ$ ?*

V rovnostranném trojúhelníku o straně 1 je výška

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dostáváme pak trojúhelník s přeponou délky 1, přilehlou délky  $\frac{1}{2}$  a protilehlou délky  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Proto

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

Ve stejném trojúhelníku máme i úhel  $30^\circ$ . Jen se vlastně prohodí role protilehlé a přilehlé: Sinus si tak prohodí hodnoty s kosinem a hodnota tangesu bude převrácená oproti původní:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Výsledky shrnuje obrázek 5.

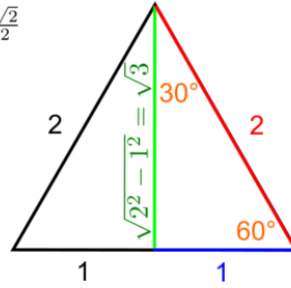
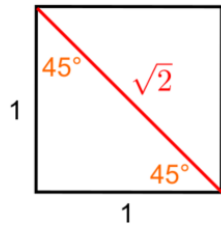
Vidíme, že hodnoty  $\sin$  a  $\cos$  jsou vždy mezi 0 a 1, zatímco  $\tan$  může být i větší. Co kdybychom chtěli určit hodnoty goniometrických funkcí i pro jiné úhly  $\alpha$ , třeba  $20^\circ$ ,  $70^\circ$  nebo podobně? Mohli bychom si pomoci úhloměru a pravítka rýsovat různé pravoúhlé trojúhelníky s různým úhlem  $\alpha$ , měřit délky stran trojúhelníku a do tabulky poté vynášet hodnoty poměrů stran.

*Karel je nagelovaný sportovec, takže je soutěživý. Chce se vsadit s Dorou o kaštiny, že pomocí rýsování dokáže přesněji určit hodnotu  $\sin 20^\circ$ . O vítězi pak má rozhodnout kalkulačka. Karel vítězoslavně stanovil hodnotu 0,38. Dokážete rýsovat přesněji než Karel a vyfouknout mu kaštiny?*

Velice pečlivým měřením bychom došli k číslům v obrázku 6 a mohli bychom také nakreslit grafy funkcí  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ . Kalkulačka má hodnoty pro různé úhly nejspíše uložené v paměti. Při zadání libovolného úhlu pak najde hodnoty pro dva známé úhly, mezi kterými zadaný úhel leží, a hodnotu určí takzvanou interpolací. Kde se ale vezmou přesné hodnoty, které se pak uloží do paměti kalkulačky? O tom v kapitole 5.8.

*Když jsi tak chytrý, Karle, tak si tě prověřím. Máš desku stolu ve tvaru pravoúhlého trojúhelníku s úhlem  $30^\circ$ . Nejdelší strana má délku 120 cm. Jakou délku mají zbývající strany?*

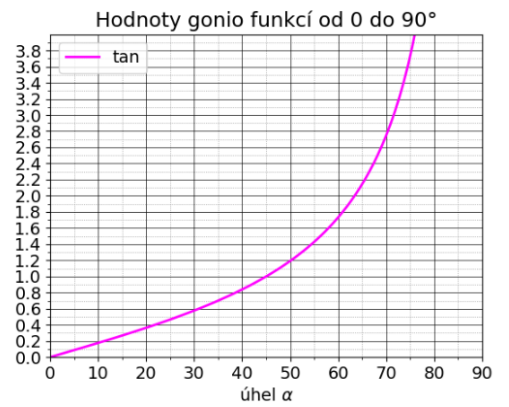
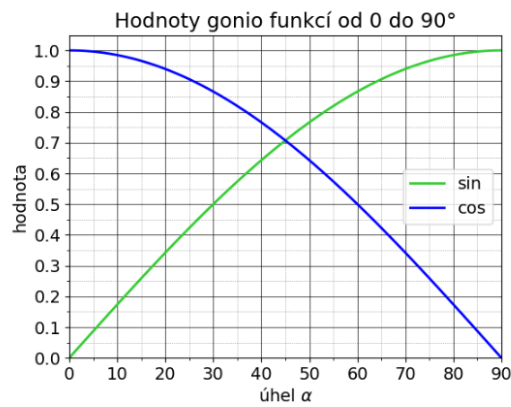
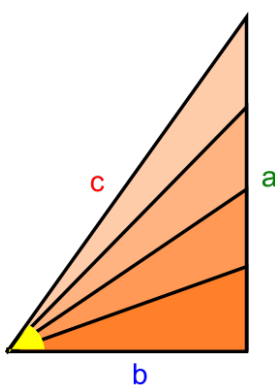
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



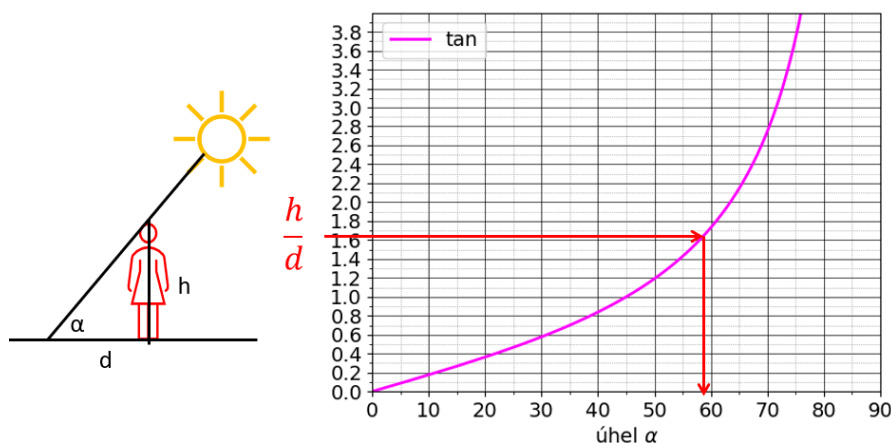
$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Obrázek 5: Hodnoty goniometrických funkcí pro významné úhly.



Obrázek 6: Hodnoty goniometrických funkcí.



Obrázek 7: Inverzní funkce

Ve fyzice je častá situace, kdy známe délku přepony  $c$  pravouhlého trojúhelníka a hledáme velikosti odvěsen. Dostaneme

$$\sin \alpha = a/c \Rightarrow a = c \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = b/c \Rightarrow b = c \sin \alpha$$

Jelikož hodnota  $\sin$  a  $\cos$  je menší než 1, tak přirozeně délky odvěsen vycházejí menší než délka přepony. Pokud naopak známe délku jedné z odvěsen, tak můžeme vypočítat délku přepony:

$$\sin \alpha = b/c \Rightarrow c = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = a/c \Rightarrow c = \frac{a}{\cos \alpha}$$

Zde dělíme hodnotami  $\sin$  nebo  $\cos$ , jež jsou čísla menší než 1, takže délka přepony vychází přirozeně větší než délka odvěsen. Tyto různé situace vidíme shrnuté v obrázcích 4.

Studenti někdy pletou, jestli pro získání délky požadované strany mají sinem (kosinem) násobit nebo dělit. Pokud si nejste jistí, tak si vždy uvědomte, že přepona je nejdelší stranou a že sinus je vždy menší nebo roven 1. Odvěsna je kratší, takže přeponu musím násobit sinem (kosinem). Naopak přepona je nejdelší, takže odvěsnu musím dělit sinem (kosinem). Pak je také dobré si uvědomit, že pokud má přepona délku 1, tak délky odvěsen jsou přímo hodnoty goniometrických funkcí.

Nakonec si ještě všimněme jedné velmi důležité souvislosti.

$$\tan \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přílehlá}} = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} \cdot \frac{\text{přepona}}{\text{přílehlá}} = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Tangens úhlu tedy jde vyjádřit jako sinus děleno kosinem. To je důležité si pamatovat.

### 3.3 Inverzní funkce

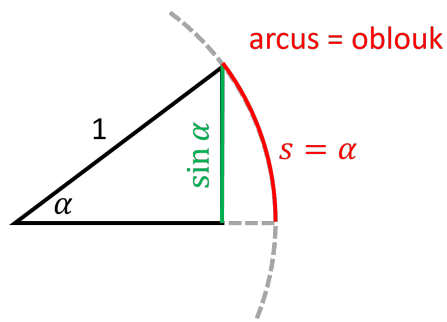
*O pár dní později Dora s Karlem zase stáli vedle nějakého stromku. Karel si vzpomněl na minulé setkání a napadlo ho, že bude předstírat zájem o goniometrické funkce. Dokonce si kvůli tomu vzal do kapsy svinovací metr, přestože ho tlačil. Přiskočil k Doře a rychlým pohybem změřil její výšku i délku jejího stínu a vychrlil: Tak a máš to! Měříš 168 cm a tvůj stín má délku 102 cm. A teď mi teda Dori řekni, pod jakým úhlem na zemi dopadají sluneční paprsky! Co Dora odpověděla?*

V uvedeném případě je poměr odvěsen

$$\frac{a}{b} = \frac{168}{102} = 1,647 = \tan \alpha$$

Podíváme se, kterému úhlu přísluší takováto hodnota funkce tangens (obrázek 7)

Z grafu vidíme, že je to asi  $59^\circ$ , přesněji  $58,7^\circ$ . V tomto případě hodnotě poměru stran přiřazujeme úhel v pravouhlém trojúhelníku. To je opačný proces než v předchozím. Opět bychom mohli definovat funkci (mechanismus), který poměru stran, tedy číslu, přiřazuje úhel. V případě hledání úhlu pro poměr protilehlá/přílehlá se tato funkce nazývá arkustangens a značí se obvykle  $\text{atan}$ ,  $\text{arctan}$ ,  $\text{arctg}$ , nebo jednoduše



Obrázek 8: K etymologii slova arkussinus

$\tan^{-1}$ , což obvykle najdete napsáno na tlačítku kalkulačky. Řešení naší úlohy bychom proto mohli zapsat jako

$$\alpha = \tan^{-1} 1,647 = 58,7^\circ.$$

Také bychom tuto funkci mohli nazvat jako inverzní tangens. Stejně tak se definují funkce inverzní k sinus a kosinus a nazývají se arkussinus a arkuskosinus,<sup>2</sup> přičemž se značí  $\text{asin}$ ,  $\text{arcsin}$ ,  $\text{acos}$ ,  $\text{arccos}$ , či opět  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$ .

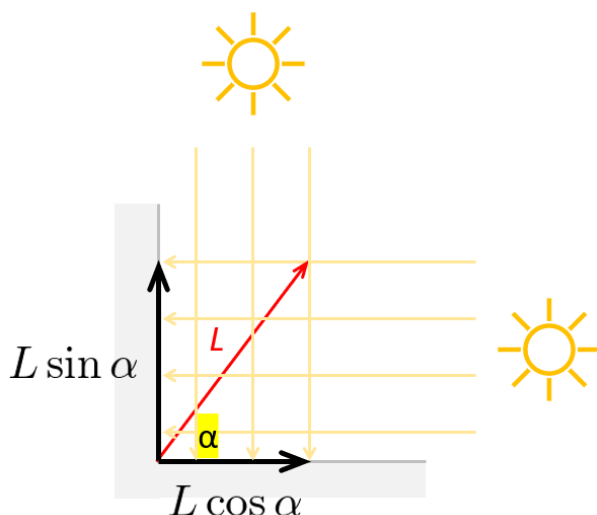
<sup>2</sup>Možná vám vrtá hlavou, proč je v názvu zrovna slovo arcus. Arcus znamená oblouk. Zdůvodnění názvu funkce arkussinus je naznačeno v obrázku 8. Jedná se o délku oblouku příslušného k polovině tětivy, tedy k sinu.



## 4 Užití goniometrických funkcí ostrého úhlu ve fyzice

### 4.1 Průmět

Představte si, že u paty stěny zabodneme tyčku délky  $L$  pod úhlem  $\alpha$  vůči zemi, jako je na obrázku. V pravé poledne, když slunce svítí přímo zvrchu, tak na zemi vidíme stín tyčky. Paprsky dopadají kolmo na zem a délka stínu je patrně  $L \cos \alpha$ . Můžeme říci, že stín je kolmý *průmět* tyčky na zem. Při západu slunce naopak paprsky jdou rovnoběžně se zemí, dopadají kolmo na stěnu a tyčka na stěnu vrhá stín o délce  $L \sin \alpha$ . Můžeme říci, že se jedná o kolmý *průmět* tyčky na stěnu. S pojmem průmět se ve fyzice budeme setkávat často. Slovo průmět pochází od slovesa promítání a promítání je proces, kdy na nějaký předmět svítíme a jinde vzniká jeho obraz.



Obrázek 9: Průmět tyčky jako stín

### 4.2 Práce

*Karel sedí v hodině fyziky a poslouchá výklad o mechanické práci. Aby nějaká síla vykonala práci, tak musí přispět k posunutí nějakého předmětu. Vykonaná práce je pak součinem velikosti síly a tohoto posunutí*

$$W = Fs.$$

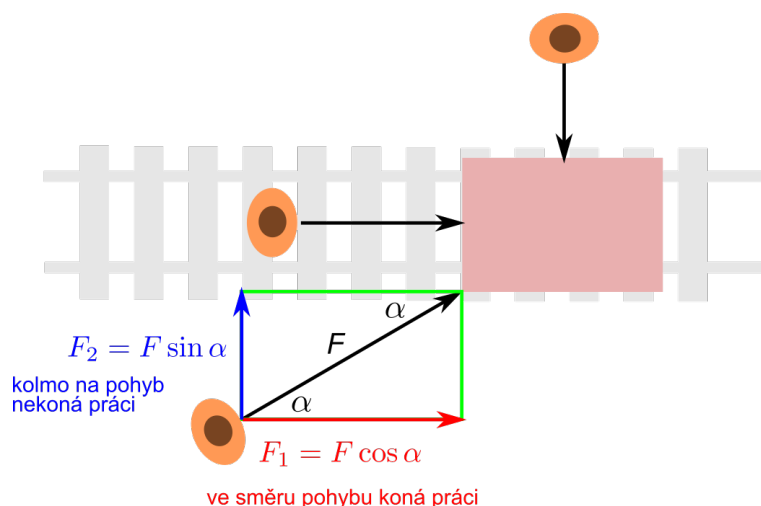
*Učitel ale nějak zmateně říkal, že takto to platí jedině když síla působí přesně ve směru posunutí. Když ale síla nepůsobí ve směru posunutí, tak je potřeba si představit, že síla  $\vec{F}$  jakoby sestává ze dvou sil  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$ , z nichž první působí přesně ve směru posunutí a druhá působí kolmo na směr posunutí. První síla pak vykoná práci  $W_1 = F_1 s$  a druhá vykoná nulovou práci, protože když působí kolmo, tak vůbec nepřispívá k posunutí tělesa. Práce vykonaná původní silou je pak jen  $W = F_1 s$ . Prý vlastně stačí zjistit, jak velký je průmět té síly  $\vec{F}$  do směru pohybu. . . Karel však již ztratil pozornost a vzpomněl si, jak se na školním výletě do Solwayových lomů snažili s Dorou po kolejkách roztlačit malý důlní vozík. Dora tlačila přímo zezadu, Karel z boku pod úhlem  $30^\circ$  vzhledem ke kolejkám a přivandroval se k tomu ještě Pepa, který se bál, že se vozík převrátí, a stoupl si na druhou stranu vozíku a tlačil směrem ke Karlovi. Vozík posunuli asi o 6 metrů, Karel působil silou asi 300 N, Dora 200 N a Pepa těžko říct. Karla napadlo, jestli by šlo určit, kdo z nich vykonal jak velkou práci.*

Dora působí přímo ve směru posunutí, takže její práce je  $W_D = F_D \cdot s = 200 \cdot 6 = 1200$  J. Karlovu sílu rozložíme jako součet síly ve směru pohybu vozíku  $F_1$  a sílu kolmo na směr pohybu  $F_2$ . Z obrázku vidíme, že  $F_1 = F \cos \alpha$  a Karlem vykonaná práce tak je  $W_K = F \cos \alpha \cdot s = 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 \approx 1159$  J. Vidíme zde, že jsme vlastně použili průmět Karlovy síly  $F$  do směru pohybu. Pepa tlačí kolmo na směr pohybu a tak je jím vykonaná práce nulová. Podobné úvahy jsou ve fyzice velmi důležité.

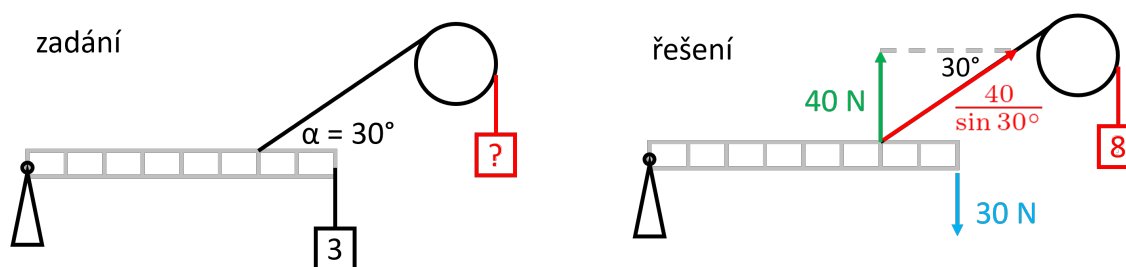
Viděli jsme, že na velikost vykonané práce má vliv vzájemný směr posunutí a působící síly:

$$W = Fs \cos \alpha.$$

Když jsou rovnoběžné, platí  $W = Fs$ , když jsou kolmé, tak je  $W = 0$ . Můžeme si všimnout, že vlastně bereme dva vektory, sílu  $\vec{F}$  a posunutí  $\vec{s}$  a po výpočtu dostáváme práci, což není vektor, nýbrž číslo/skalár



Obrázek 10: Práci koná jen složka síly mířící ve směru pohybu.



Obrázek 11: Podivná houpačka

(nemá směr). Vztah pro práci se ve vyšší fyzice píše kompaktně pomocí takzvaného skalárního součinu dvou vektorů, což je operace, která se značí tečkou

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Takto zapsaný vztah už v sobě vnitřně obsahuje informaci o tom, že nejprve určíme velikost průmětu vektoru síly do směru posunutí a teprve potom násobíme velikostí posunutí.

### 4.3 Moment síly

*Dora konečně pozvala Karla k sobě domů. Karel byl značně nervózní a chtěl se připravit na všechny eventuality, takže si radši nastudoval goniometrické funkce a i něco trochu z fyziky a pak se ještě podíval na jedno video. Nakonec koupil lůžátko a vonnou tyčinku a vyrazil. Dora ho ale hned u dveří přivítala dost podivně. Pustil ho dovnitř jen tehdy, když vyřeší hádanku. Ukázala Karlovi malý model houpačky jako na obrázku 11. Karel má za úkol zjistit, jak těžké závaží má pověsit na provázek, aby houpačka byla v rovnováze. Co myslíte, zvládne splnit úkol a vstoupit do bytu?*

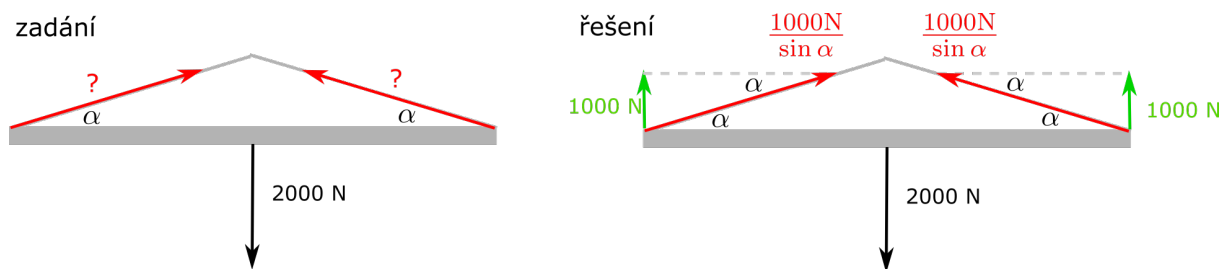
Vidíme jakousi jednozvratnou páku. Závaží 3 kg působí tíhou 30 N ve vzdálenosti 8 dílků od osy otáčení kolmo na tyčku, zatímco lanko působí ve vzdálenosti 6 dílků. Kdyby lanko působilo také kolmo na tyčku, tak by byla potřeba síla 40 N, protože rameno této síly je kratší a musí platit rovnost momentů sil  $30 \text{ N} \cdot 8 \text{ dílků} = F \cdot 6 \text{ dílků}$ . Jenže lanko nepůsobí kolmo na tyčku. Tušíme, že kdyby lanko působilo rovnoběžně na tyčku, tak jeho schopnost otáčet tyčkou bude nulová, zatímco když působí kolmo na tyčku, tak jeho schopnost otáčet tyčkou je maximální. Musí tedy platit, že hledaná síla od lanka vytváří sílu 40 N ve směru kolmo k tyčce, tedy vertikálně. Celková síla od lanka (ve směru lanka) musí proto mít velikost

$$F = 40 \text{ N} / \sin 30^\circ = 80 \text{ N}$$

Houpačka tedy bude vyvážena při zavěšení závaží o hmotnosti 8 kg.

### 4.4 Zatížení lan a konstrukcí

*Karle, Karle, podívej se z okna na ten jeřáb, jak zvedá tu traverzu. To se mi vůbec nechce líbit! Vždyť ta tenoučká lanka se můžou snadno přetřhnout! Karel vidí, jak je vodorovná traverza zavěšená na koncích*



Obrázek 12: Zatížení lan

na lanech, která se sbíhají do jednoho bodu upevnění. Lana s traverzou svírají úhel  $20^\circ$  (obrázek 12). Když Karlovi nic nehrozí, tak má obvykle pro strach uděláno, takže konejšivě odpověděl: Buď v klidu, ta traverza má tak 200 kg, takže každé to lano jakoby nese hmotnost jenom 100 kg, a to hravě udrží. Cítil se sám se sebou nad míru spokojený, ale to se šeredně přepočítal. Pane bože, co to meleš, jakých 100 kilo? Každé to lano je přeci napínáno daleko větší sílou! To vůbec nezačíná dobře, panikař Karel a honem přemýšlí, jakou silou že vlastně ty lana jsou napínána. . .

Situace je hodně podobná jako v předchozí úloze o houpačce. Každé lano musí působit silou 1000 N vertikálně nahoru. Jenže lano umí působit jen ve směru lana, takže 1000 N odpovídá vertikální složce celkové síly. Hodnota 1000 N je délkou odvěsny a my hledáme délku přepony. Její délka je

$$F = 1000 \text{ N} / \sin 20^\circ = 2924 \text{ N}$$

Je to tedy jako kdyby na každém laně viselo závaží o hmotnosti skoro 300 kg, nikoli 100 kg, jak se domníval Karel. Čím bude úhel  $\alpha$  menší, tím větší silou budou lana napínána.

## 4.5 Nakloněná rovina

Karel byl celý den jak na trní a jeho nervozita by se dala krájet. Koupil Dorotce k narozeninám náhrdelník z krásných kulatých korálek, které vypadaly jako pravé perly. Teď už zbývalo jen čekat. Dorka vykřikla radostí! Ten je nádherný, už dlouho jsem chtěla takový zkusit! Karel už se těšil, jak si ho nasadí, ale nemohl se víc mýlit. Dorka vzala náhrdelník, pečlivě ho namydliła a nasadila ho na takový zvláštní plastový klínek jako na obrázku 13. Karel vůbec nechápal, co se děje, ale Dora byla šťastím bez sebe.

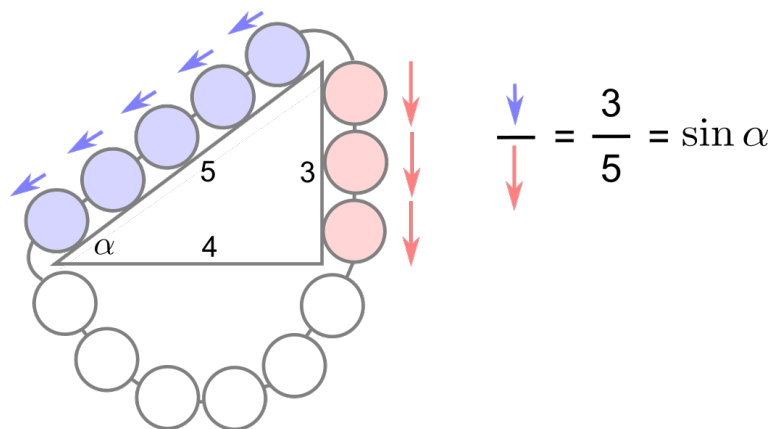
Už od starověku bylo lidem jasné, že pokud tlačí vůz po mírném svahu, tak stačí menší síla, zatímco když svah je prudký, tak je třeba větší síla. Nedařilo se ale objasnit, jak velikost síly závisí na úhlu sklonu svahu. Zabýval se tím už Archimédes. Krásné a elegantní objasnění však přišlo až ve středověku a stojí na myšlenkovém experimentu.<sup>3</sup> Když řetízek z korálek nasadíme na klín, jako na obrázku, tak řetízek nebude klouzat ani dolů, ani nahoru. Kdyby tam totiž na korálek působila nějaká síla, tak by se řetízek musel pohybovat pořád, což není možné. Síly na korálek tedy musí být v rovnováze. Na přeponě trojúhelníku je 5 korálek, na pravé odvěsne jsou 3 korálek. Síla působící na 5 korálek musí být tedy stejně velká, jako síla působící na ty tři korálek. Tři korálek jsou dolů taženy přímo svisle a na každý působí síla o velikosti  $mg$ . Aby síly byly v rovnováze, tak na každý z pěti korálek musí působit síla o velikosti  $\frac{3}{5}mg$ . Číslo  $\frac{3}{5}$  je ale poměr délky odvěsny-protilehlé a přepony trojúhelníku! Takže síla, která tahá předměty dolů po svahu o sklonu  $\alpha$  je zmenšena faktorem (protilehlá/přepona) =  $\sin \alpha$ , neboli  $F = mg \sin \alpha$ .

Tuto krásnou středověkou úvahu však již umíme vysvětlit tak, že síla tahající kuličku dolů svahem je průmětem gravitační síly do směru svahu (tedy jak moc gravitační síla míří ve směru svahu) Gravitační sílu totiž můžeme rozložit do směru podél svahu a do směru kolmo na svah, jak je ukázáno v obrázku 14. Síla kolmo na svah nezpůsobuje zrychlování, je to totiž síla od kuličky na svah a ta je přesně kompenzována silou, kterou svah působí na kuličku (kdyby to tak nebylo, tak by se kulička začala zabořovat do podložky). Síla kolmo na svah bývá často označována jako normálová síla  $F_n$ , kde slovo normálová znamená to samé jako kolmá.

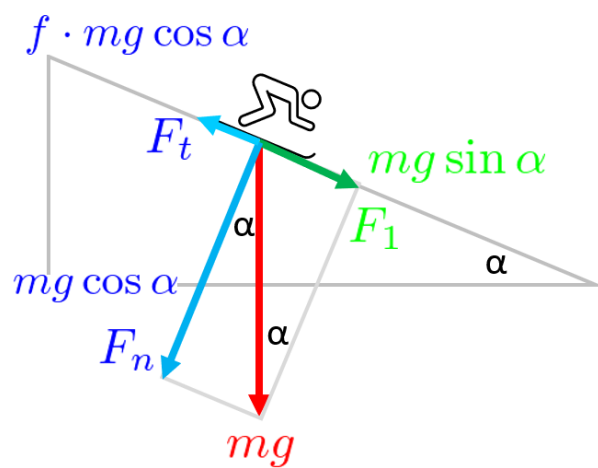
Karlovi se konečně podařilo vytáhnout Doru na hory na běžky. Dlouho se tomu vyhýbala, protože říká, že neumí lyžovat, ale to právě Karel ucítil příležitost a přeochoťně se jí nabídl, že ji to naučí. Pěšky si vyšlapali na malý svah a Karel už se chystal začít moudře vysvětlovat techniku, když v tom viděl, že Dora začíná klouzat pryč a křičí o pomoc. Než se Karel vzpamatoval a zacvaknul se do lyží, aby mohl Doru zachránit, tak uplynuly tři sekundy. Jak daleko mezitím Dora odjela? Karel zkušeným okem zhodnotil, že svah má sklon  $\alpha = 25^\circ$  a že koeficient tření mezi sněhem a lyžemi je  $f = 0,15$ , ať už to znamená cokoli.

Dora jen pasivně klouže svahem, takže na ni působí gravitační síla a třecí síla. Gravitační síla  $F_g = mg$  míří svisle dolů. Již ale víme, že ji můžeme rozložit do dvou dílčích sil – síly ve směru pohybu  $F_1$  a síly kolmo

<sup>3</sup>jedná se o takzvaný Stevinův důkaz: [https://en.wikipedia.org/wiki/Inclined\\_plane](https://en.wikipedia.org/wiki/Inclined_plane)



Obrázek 13: Síla na nakloněné rovině



Obrázek 14: Lyžař na nakloněné rovině

do svahu, takzvané normálové síly  $F_n$ . Síla  $F_1$  bude způsobovat zrychlování dolů svahem. Pohyb ale bude brzděn třecí silou  $F_t$ , jejíž velikost je závislá na tom, jak velkou silou jsou lyže přitlačovány je sněhu, to jest na velikosti normálové síly  $F_n$ . Z obrázku je patrné, že gravitační síla hraje roli přepony v trojúhelníku a tedy že složka gravitační síly ve směru pohybu má velikost

$$F_1 = mg \sin \alpha$$

Podobně velikost přítláčné síly je

$$F_n = mg \cos \alpha$$

Velikost třecí síly závisí na přítláčné síle a "míře drhnutí" obou povrchů, která je vyjádřena právě třecím koeficientem  $f = 0,15$ , který pro lyže a sněh je spíše malý. Proto

$$F_t = fF_n = fmg \cos \alpha$$

Celková síla ve směru pohybu pak je

$$F = F_1 - F_t = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Pro zrychlení Dory platí z druhého Newtonova zákona  $a = F/m$  a tedy

$$a = \frac{F_1 - F_t}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 2,8 \text{ m/s}^2$$

kde  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  je gravitační zrychlení. Když známe zrychlení, tak dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu určíme ze známého vztahu  $s = \frac{1}{2}at^2$ . V našem případě po dosazení  $t = 3 \text{ s}$  máme uraženou dráhu 12,6 m. Mohla by nás zajímat i rychlost po třech sekundách, což by bylo jednoduše  $v = at = 8,4 \text{ m/s} \approx 30 \text{ km/h}$ . Tak snad to Dorka nějak zvládne ubrzdít, nebo ji Karel mocnými odrazy zvládne dohnat a zachránit.

*Karle, moc ti děkuji, že jsi mi zachránil život! Vykřikla Dora a vděčně Karla objala. Pak se ale odtáhla a nejpřísnějším hlasem, co uměla, řekla: Zaroveň tě ale chci přísně pokárat, že jsi mě do té nebezpečné situace přivedl! Viděla, že Karel je opět po emoční stránce nějaký zmatený, tak radši vypnula přísný tón a již normálně začala mluvit dál: Příště už si budu stoupat jenom na takový svah, abych se rozjela jenom když se odrazím! No jo, ale jak prudký svah to podle tebe jako má být? Oponoval Karel. Hm, jaký vlastně maximální sklon může mít svah, abych z něj nezačala samovolně klouzat? Dora se zadumala a Karel ji se zájmem pozoroval. Okolo hlavy se jí jakoby skoro rozsvítila svatozář. Co se jí asi honí tou její kulatou kebulí, pomyslel si Karel. . .*

Když na svahu jen stojím, tak síla, kterou mě tahá dolů gravitace, je přesně vyrovnána statickou třecí silou. Statická třecí síla může dosáhnout ale jen určité maximální hodnoty, a to  $F_{t,max} = fF_n$ , kde ale nyní  $f$  je statický koeficient tření, který bývá o kousek větší než ten smykový koeficient. Řekněme, že na sněhu třeba  $f = 0,2$ . Pro maximální sklon musí platit, že složka gravitace ve směru pohybu  $F_1$  je přesně rovna maximální hodnotě třecí síly, tedy

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{t,max} \\ mg \sin \alpha &= fmg \cos \alpha \end{aligned}$$

*Karle, sleduješ mě vůbec ještě? šťouchla Dora Karlovi pod žebra. Jo,jo, samozřejmě, tebe vždycky, to přeci víš, vyloudil ze sebe Karel. Opravdu? Tak mi teda řekni, jak to bude pokračovat! zašklebila se Dorka.*

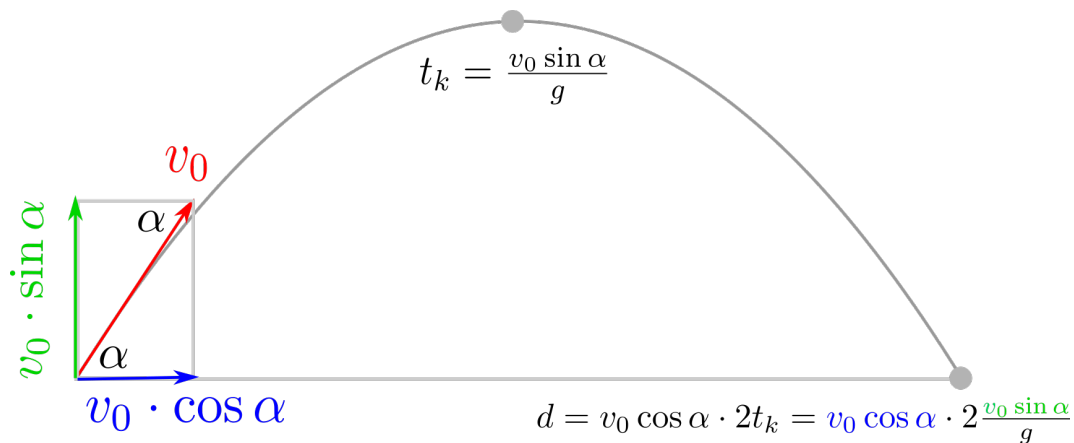
V poslední rovnici zkrátíme  $mg$  a goniometrické funkce přeneseme na stejnou stranu:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = f \quad \rightarrow \quad \tan \alpha = f \quad \rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1} f = \tan^{-1} 0,2 \approx 11^\circ$$

*No, tak to si moc nezajezdíme, pomyslel si Karel. Když ale sledoval výpočet, tak si uvědomil, že kdyby koeficient tření byl 0,6, což je běžná hodnota mezi pneumatikou a silnicí, tak by maximální úhel náklonu vyšel 31°. To si musím pamatovat, až začnu jezdit autem, řekl si Karel a se svým poznatkem se svěřil Dorce. No vidíš, jaký seš koumák! A dala mu pěstí pod žebro mnohem silněji, než před chvílí.*

## 4.6 Šikmý vrh

*Karel pozval Doru na jeho fotbalový zápas. Hraje dobře a obzvlášť je pyšný na svoje přímé kopy. Pěkně jsi hrál, Karle, chválí ho Dora, a Karel se dme pýchou. Trošku ale ztratil zábrany a ještě si přisadil: Přímáky vykopávám rychlostí 150 km/h! Dora se na něj podezřívavě a zároveň trochu pobaveně podívá, vytáhne z kapsy tužku a papír a něco si začne mumlat: Takže počáteční rychlost asi 40 m/s, vykopne pod úhlem tak 30°, hmm,*



Obrázek 15: Šikmý vrh

*hmm, odpor vzduchu zanedbám. Jak daleko by dokopnul? Je to vůbec možné? Nekecá zase ten Karel?... Co myslíte, kecá Karel? Jak daleko by míč dopadnul?*

Nejdříve si velkoryse dovolíme zanedbat odpor vzduchu. Počáteční rychlost  $v_0$  míří pod úhlem  $\alpha$  vůči zemi. Počáteční rychlost tedy můžeme rozložit do vodorovného a svislého směru:  $v_{x,0} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{y,0} = v_0 \sin \alpha$ . Vtip je v tom, že gravitace působí svisle dolů a bude tak ovlivňovat jen vertikální složku rychlosti, zatímco horizontální složka rychlosti zůstane během pohybu pořád stejná. Vertikální složka  $v_y$  ubude každou sekundu o hodnotu  $g$  a pro její velikost platí  $v_y = v_{y,0} - gt$ . V nejvyšším bodě je vertikální rychlost nulová, takže míč dosáhne nejvyššího (kulminačního) bodu v čase  $t_k = v_{y,0}/g$ . Míč pak ale klesá stejnou dobu jako stoupal, takže celkový čas letu je  $t = 2v_{y,0}/g$ . Jak daleko uletí v horizontálním směru? Horizontálně uletí vzdálenost

$$d = v_{x,0}t = \frac{2v_{x,0}v_{y,0}}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$$

Dosazením hodnot pro údajný Karlův kop dostaneme  $d = 141$  m. To by o hodně překoplo celé fotbalové hřiště. Karel si asi trochu zapřeháněl. <sup>4</sup>

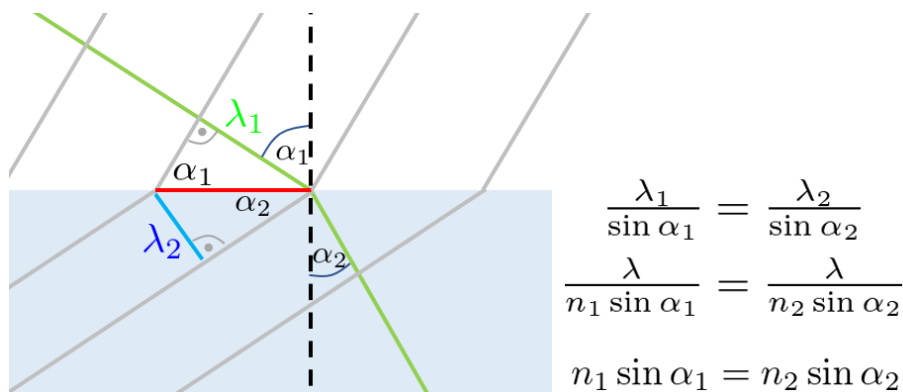
## 4.7 Zákon lomu

*Dora kápala do akvária trošku mléka a na hladinu namířila paprsek z laserového ukazovátka. Když paprsek namířila kolmo na hladinu, tak bylo vidět, že normálně prochází do vody. Když ale paprskem posvítla na hladinu trochu šikmo, tak najednou bylo vidět, že se paprsek po vstupu do vody trochu zlomil. Čím víc šikmo do vody mířila, tím bylo zlomení více patrné. Podívej, není to nádherná? Když posvítíš na zrcadlo, tak se paprsek vždy odrazí pod stejným úhlem, jako přiletěl. Při vstupu do vody ale změní směr, původně ve vzduchu mířil pod úhlem  $\alpha_1$  a po vstupu do vody už míří pod úhlem  $\alpha_2$ . Díky takovým změnám směru při vstupu do vody nebo skla fungují oči, brýle, foťáky, kamery, prostě všechna optika. Aby bylo možné tyhle přístroje sestavit, je potřeba rozumět tomu, jak se při lomu mění směr paprsku, neboli když víme úhel dopadu  $\alpha_1$ , tak potřebujeme vědět, jaký bude úhel po lomu  $\alpha_2$ . Když se na to tak koukám, není to prostě tak, že ten úhel lomu je poloviční oproti úhlu dopadu, nebo že prostě stačí ten úhel dopadu  $\alpha_1$  vynásobit nějakým číslem menším než 1 a dostaneme ten úhel  $\alpha_2$ ? Karel položil otázku a už to nešlo vzít zpět. Dora se usmála a jala se mu vše obšírně vysvětlit.*

Vztah  $\alpha_2 = \alpha_1/2$  bohužel (bohudík) neplatí. Je trochu složitější. Paprsek se po vstupu ze vzduchu do vody nebo skla láme proto, že ve vodě světlo letí pomaleji než ve vzduchu. Nejrychleji letí světlo ve vakuu a tuto rychlost značíme  $c$ . Ve hmotném prostředí je rychlost vždy menší. Kolikrát menší je, to vyjadřuje index lomu prostředí  $n$ . Ve vzduchu se světlo šíří skoro stejně rychle jako ve vakuu, takže index lomu vzduchu je skoro roven jedné  $n_1 \approx 1$ . Zato např. voda má index lomu 1,33 a sklo má index lomu roven zhruba  $n_2 = 1,5$ , což znamená, že světlo se v něm šíří 1,5× pomaleji než vakuem.

Světlo je svou podstatou vlna. Je těžké si to představit, proto nejdříve začneme vlnou na vodě. Na hladině jsou místa, kde je hladina vysoko a střídají se s místy, kde je hladina nízko. Vzdálenost mezi sousedními vršky vlny označujeme jako vlnovou délku a značíme  $\lambda$ . Vršky vlny na vodě se také pohybují nějakou rychlostí  $v$ . Stejně tak světlo má určitou vlnovou délku a šíří se určitou rychlostí. Světlo je takzvané elektromagnetické vlnění. Když prochází vlna na vodě, tak se na daném místě mění výška hladiny a třeba se tím rozhoupe kus dřeva. Dřevo tak jde nahoru a pak zase dolů a tak pořád dokola. Když elektromagnetické vlnění prochází

<sup>4</sup>V důsledku odporu vzduchu by samozřejmě při dané počáteční rychlosti byl dolet daleko kratší. Na internetových fcech je možné se dočíst, že profesionálové dokáží kopnout rychlostí až 130 km/h, což jen utvrzuje zjištění, že Karel přeháněl.



Obrázek 16: Zákon lomu

prostorem, ve kterém na určitém místě leží elektron, tak vlna rozhoupe tento elektron – chvíli je síla působící na elektron třeba nahoru, pak se postupně zmenšuje a začne mířit dolů a tak pořád dokola. Elektromagnetická vlna je tedy schopná rozhoupat/rozkmitat elektron.

Dobře, to je tedy na úvod. Když světlo prochází vzduchem, tak se oproti vakuu zpomalí  $n_1 \times$ . Proto za jednotku času urazí kratší vzdálenost a zmenší se i vlnová délka:  $\lambda_1 = \lambda/n_1$ . Když prochází vodou, tak jeho vlnová délka je  $\lambda_2 = \lambda/n_2$ . Jak ale vidíme v obrázku 16, vršky vln (šedě) ve vzduchu a ve vodě na sebe musí pořád navazovat. A to je klíčem ke získání vztahu mezi  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . V obrázku vidíme dva trojúhelníky, které k sobě přiléhají přeponami. Odvěsna vrchního trojúhelníku odpovídá vlnové délce ve vzduchu  $\lambda_1 = \lambda/n_1$  a odvěsna spodního má délku  $\lambda_2 = \lambda/n_2$ . Obě odvěsny jsou protilehlé k úhlům  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Délka přepony, která je oběma trojúhelníkům společná, je pak

$$\frac{\lambda}{n_1 \sin \alpha_1} = p = \frac{\lambda}{n_2 \sin \alpha_2}$$

Vlnové délky ve vakuu  $\lambda$  se vykrátí a vezmeme převrácené hodnoty vzniklých výrazů, čímž dostáváme

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

To je slavný zákon lomu, který svazuje úhly dopadu a lomu  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Raději zde zdůrazníme, že tyto úhly jsou měřeny od kolmice na rozhraní dvou prostředí.

*Stiháš sledovat, Karle? Zeptala se Dorka, když viděla, že Karel má nápadně přivřené oči a vyluzuje divné nearticulované zvuky. Jo, samozřejmě, úplně ti visím na rtech. Skvěle, tak teď bys mi měl být schopný říct, pod jakým úhlem vzhledem ke kolmici na hladinu se bude šířit paprsek ve vodě, když na hladinu posvítím pod úhlem  $45^\circ$ ? Co má odpovědět Karel, aby ho Dora nepřistihla při lži?*

Jednoduše dosadíme do zákona lomu:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (1)$$

$$\frac{n_1}{n_2} \alpha_1 = \sin \alpha_2 \quad (2)$$

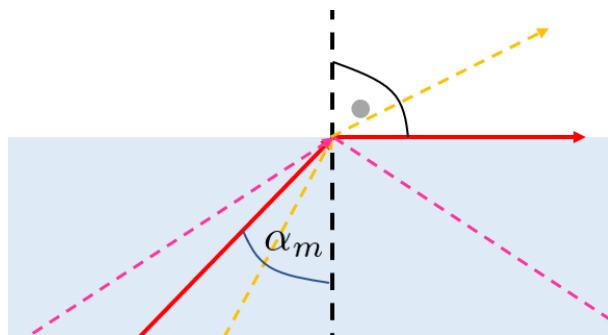
$$\sin^{-1} \left( \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 \right) = \alpha_2 = 36,2^\circ \quad (3)$$

Úhel směřování paprsku ve vodě vůči kolmici na rozhraní je tedy menší, než úhel dopadajícího paprsku ve vzduchu. Tomuto jevu se říká lom ke kolmici.

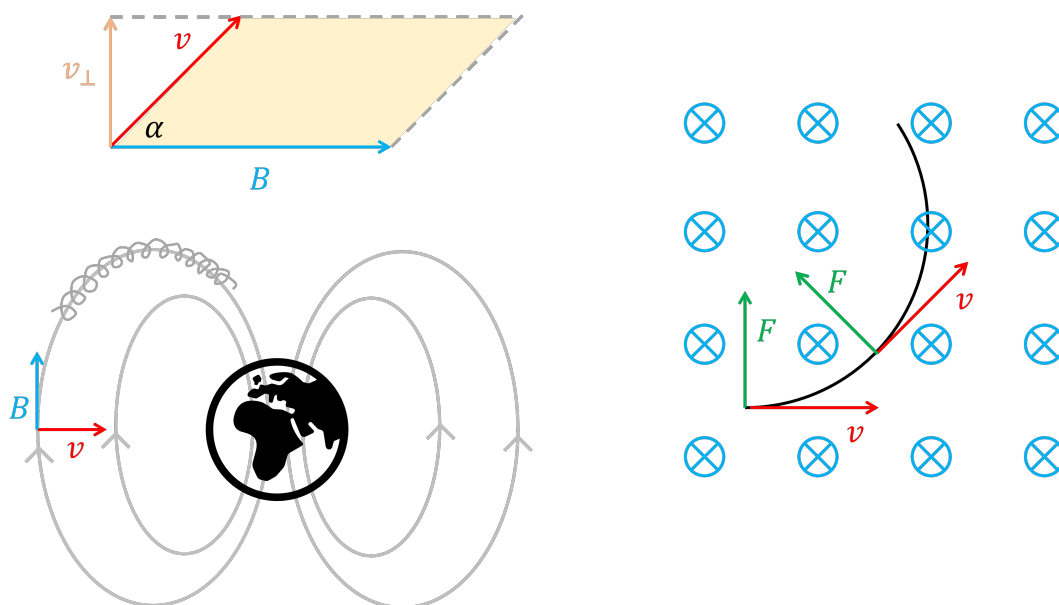
*Karel tušil, že se tedy moc nepředvedl. Když si ale už myslel, že z toho nějak vybruslil, jako boží rána na něj dopadla další otázka... Dorka vzala laserové ukazovátko a posvítila do akvária ze spoda tak, že nejdříve procházel vodou a pak vystupoval do vzduchu. Když paprsek nešel moc šikmo k hladině, tak normálně vystoupil do vzduchu. Když ho ale mířila víc a víc šikmo, tak vystupoval čím dál víc do strany. V jednu chvíli už vystupoval tak, že klouzal po hladině a když ukazovátko naklonila ještě o kousek víc, tak už do vzduchu nevystoupil vůbec! (obrázek 17) Naopak bylo vidět, jak se úplně odrazil směrem zpět do vody. To Karla zaujalo. Dora to viděla a snažila se ho dále vzdělat. Tomu jevu se říká úplný odraz a nastává, když světlo dopadá dostatečně šikmo na rozhraní prostředí, kde se světlo šíří pomaleji, s prostředím, kde se šíří rychleji. Teď ale podívej: Jaký musí být minimální úhel dopadu paprsku z vody na rozhraní se vzduchem, aby se paprsek úplně odrazil zpět do vody?*

Je to jednoduché, nejdříve zjistíme, pod jakým úhlem musí dopadat na rozhraní, aby paprsek vystupující do vzduchu přesně klouzal po hladině. Klouzání po hladině ale znamená úhel  $90^\circ$ . Tento úhel nazveme mezní úhel  $\alpha_m$ . Ze zákona lomu musí platit

$$n_{\text{voda}} \sin \alpha_m = n_{\text{vzduch}} \sin 90^\circ = 1$$



Obrázek 17: Mezní úhel při dopadu světla z vody na rozhraní se vzduchem.



Obrázek 18: Magnetická síla

Proto

$$\alpha_m = \sin^{-1} \left( \frac{1}{n_{\text{voda}}} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,33} \right) \approx 48,8^\circ.$$

Pro úhly větší než  $48,8^\circ$  tak dojde na rozhraní voda-vzduch k úplnému odrazu.

Díky úplnému odrazu fungují skleněná optická vlákna na přenos dat: světlo uvnitř se mnohokrát odrazí od stěn a pořád zůstává uvnitř. Ten odraz je tak dobrý, že se energie světla skoro neztrácí, odrazy jsou tak mnohem lepší než u zrcadla a i po tisících odrazech světlo skoro nezeslábne.

## 4.8 Proton v magnetickém poli

*Karle, Karle, dnes večer má být v Krušných horách vidět polární záře! Pojedeme! Pojedeme? Proč ne, odpověděl po krátkém zamyšlení Karel a už si v hlavě začal připravovat několik scénářů vývoje. . . Seděli spolu na malé skalce daleko od všeho a všech. Na obzoru se mihotaly slabé červené a zelené světelné závěsy. Prostě nádhera! Karel vycítil příležitost a už už se chystal Doru vzít za ruku. Víš, jak polární záře vzniká? zeptala se bezelstně Dora a Karel jen suše polknul.*

Magnet ledničky i Země mají kolem sebe magnetické pole, které jde znázornit pomocí indukčních čar. Magnetické pole v daném místě popisujeme vektorem magnetické indukce  $\vec{B}$ , který je tečný k indukční čáře. Směr vektoru odpovídá směru orientace magnetické střílky. Experimentálně bylo zjištěno, že když magnetickým polem prolétá částice s elektrickým nábojem, třeba proton, tak na tuto částici působí magnetická síla a zakřivuje její trajektorii. Ukázalo se, že pokud částice letí kolmo na indukční čáry, tak síla na ni působící je maximální o velikosti  $F = qvB$ , kde  $q$  je elektrický náboj částice a  $v$  její rychlost. Když však částice letí rovnoběžně s indukčními čarami, tak je síla nulová. Když rychlost částice  $\vec{v}$  a vektor magnetické indukce  $\vec{B}$  svírají nějaký obecný úhel  $\alpha$ , tak velikost síly bude někde mezi těmito dvěma extrémy. Velikost magnetické síly  $F$  pak určíme tak, že z vektoru rychlosti si vezmeme jen tu složku, která míří kolmo na  $\vec{B}$ . Z obrázku 18



je patrné, že pro velikost magnetické síly platí

$$F = qv_{\perp}B = qvB \sin \alpha.$$

Všimneme si také, že výraz  $vb \sin \alpha$  vyjadřuje obsah plochy rovnoběžníku, který svírají vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{B}$ . Krásně tak vidíme, že když  $\vec{v}$  a  $\vec{B}$  míří stejným směrem, tak se rovnoběžník jakoby zavře a má nulovou plochu, tedy i síla je nulová.

Experimenty dále ukázaly, že směr síly  $\vec{F}$  je vždy kolmý jak na  $\vec{v}$ , tak na  $\vec{B}$ , tedy na oba vektory. V případě na obrázku síla míří směrem dolů do papíru.

Aby bylo možné všechny tyto zajímavé vlastnosti napsat kompaktně do jednoho vztahu, tak byla zavedena nová operace, takzvané vektorové násobení či vektorový součin, značený pomocí operátoru  $\times$ . v našem případě bychom pak psali

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Operace  $\vec{v} \times \vec{B}$  je definována tak, že výsledkem je vektor, který je kolmý na oba vstupní vektory, a jeho velikost odpovídá obsahu rovnoběžníku sevřeného těmito vektory. Čtenář pozornější než Karel si jistě všiml, že směr výsledného vektoru  $\vec{F}$  jsme neurčili jednoznačně. Na obrázku mohl mířit buď dolů do papíru, nebo nahoru ven z papíru. v obou případech je splněna podmínka, že je vektor kolmý na  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ . Směr je možno určit například pomocí takzvaného *pravidla levé ruky*, které si čtenář může vyhledat.<sup>5</sup>

Jak to všechno souvisí s polární září? Při erupcích a magnetických bouřích na Slunci je do prostoru vyvrhováno spousta nabitých částic, typicky protony, které pak velkou rychlostí letí k Zemi. Po přiblížení k Zemi se dostávají do zemského magnetického pole. Zakresleme si situaci tak, že magnetické pole Země  $\vec{B}$  míří směrem do papíru a proton letí zleva doprava. Síla na proton je pak kolmá k  $\vec{B}$  i  $\vec{v}$  a míří směrem nahoru. Síla je kolmá na rychlost, takže nezpůsobí změnu velikosti rychlosti, nýbrž změnu směru – zakříví trajektorii. Po změně směru však síla opět působí kolmo na rychlost. Takto dojdeme k tomu, že magnetická síla je vždy silou dostředivou a způsobí obíhání částice po kružnici kolem indukčních čar. Částice je tak polapena a jakoby se namotá na indukční čáry. V případě zemského magnetického pole se pak pohybuje po spirále kolem indukčních čar směrem k pólům, kde protony mohou narážet do molekul v atmosféře. Těmito nárazy se molekuly ionizují, nebo se elektrony vybudí do vyšších energetických hladin. Při návratu elektronů do jejich původních pozic v molekulách jsou vyzařovány fotony, které pak vnímáme jako polární záři.

Magnetické pole Země odklání rychle letící nabitě částice a tím chrání atmosféru před jejím odvátím, jak se to stalo třeba na Marsu. Pokud by magnetické pole zesláblo nebo zaniklo, tak povrch Země bude čelit vyšším dávkám UV záření a ionizujícího záření a také by se v důsledku dopadajícího slunečního větru dostaly do problémů telekomunikační satelity a citlivá elektronika.

Nakonec dodejme, že operace vektorový součin se ve fyzice používá hojně i na jiných místech, např. v definici momentu hybnosti nebo momentu síly.

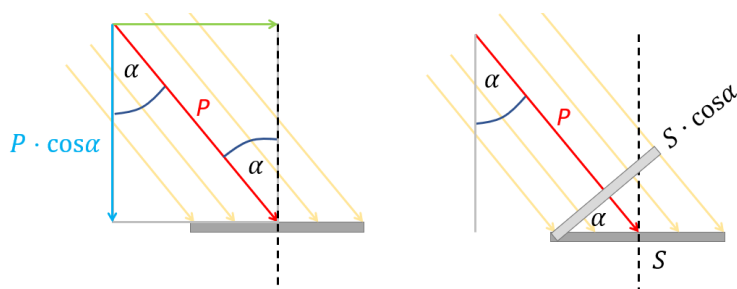
## 4.9 Osvětlení plochy

*Cestou na školní výlet Dora a Karel projížděli okolo velkého solárního parku. Karla zaujalo, že panely nejsou vodorovně se zemí, nýbrž že jsou nakloněné. Pak ho ještě napadlo, že je bez kompasu schopen určit světové strany. Nenechal si utéct příležitost a se svým poznatkem se svěřil Doře, kterou to samozřejmě nenechalo chladnou.*

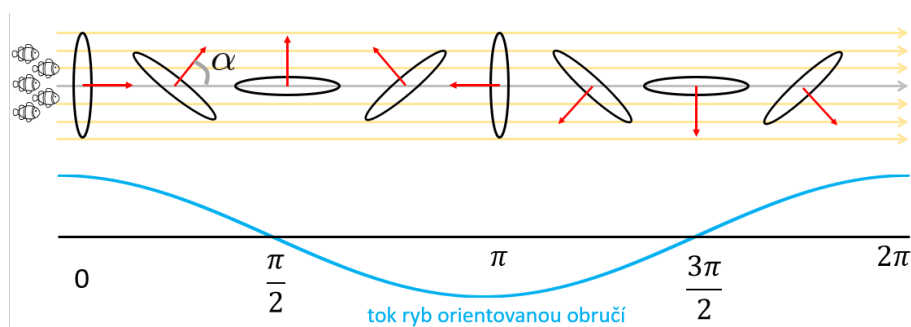
Je známo, že solární panely musí být vhodně natočeny ke slunci, aby vyráběly co nejvíc elektrické energie. Označme  $\alpha$  úhel mezi slunečními paprsky a kolmicí na panel. Když sluneční paprsky dopadají kolmo na panel,  $\alpha = 0$ , tak je výkon panelu největší. Když dopadají šikmo, výkon panelu je menší. Když by paprsky šly rovnoběžně s plochou panelu, tedy  $\alpha = 90^\circ$ , tak bude výkon prakticky nulový. Proč? Čím je úhel  $\alpha$  větší, tím menší počet částíček světla (fotonů) panel pochyťá. Čím víc bude panel nakloněný, tím menší se jeho plocha bude jevit z pohledu přicházejících fotonů. Z obrázku 19 vidíme, že zdánlivá plocha panelu  $S'$  se zmenší faktorem  $\cos \alpha$ . Případně na situaci můžeme nahlédnout i tak, že vektor vyjadřující dopadající světlo rozložíme do dvou směrů – kolmo k panelu a rovnoběžně s panelem – přičemž panel pochyťá jen tu pomyslnou část světla, která jde kolmo k panelu, viz obrázek 19. Při slunečním dnu a kolmém dopadu je výkon slunečního světla na jednotku plochy asi  $1 \text{ kW/m}^2$ . Pokud bychom měli panel třeba o ploše  $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  a dopadaly na něj paprsky pod úhlem  $30^\circ$  vzhledem ke kolmicí na panel, tak pochytaná sluneční energie za 1 s je potom

$$P_0 = 1 \text{ kW/m}^2 \cdot S' = 1 \text{ kW/m}^2 \cdot S \cos \alpha = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kW} = 3,46 \text{ kW}.$$

<sup>5</sup>Vektorový součin  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  má podobně jako obyčejný součin tu důležitou vlastnost, že platí distributivita:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ . V něčem je ale zákeřný – například není komutativní, nýbrž antikomutativní:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ . Zvědavému čtenáři doporučujeme vyhledat si další vlastnosti vektorového součinu.



Obrázek 19: Solární panel a dopad slunečních paprsků



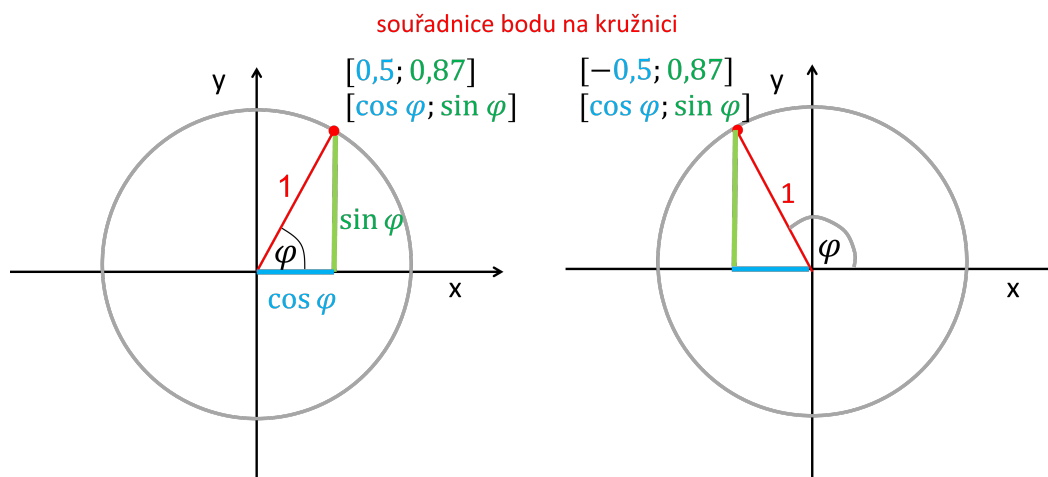
Obrázek 20: Tok orientovanou plochou

Účinnost přeměny dopadající solární energie na elektrickou je asi 25% a proto elektrický výkon solárního panelu je  $P_e = 0,87 \text{ kW}$ . To je asi elektrický příkon menší rychlovarné konvice nebo fénu, či desetinásobek příkonu ledničky.

## 4.10 Tok plochou

*Karel vytáhl Doru na ryby. Chtěl ji ukázat, že holýma rukama dokáže ulovit potravu, jako bájný pračlověk. Ještě než však začal lícit pruty, Dora si vlezla do vody, třímajíc v ruce jakousi kovovou obruč, kterou zřejmě našla pohozenou někde u popelnice. Zrovna kolem ní proplouvalo hejno malých rybiček po proudu řeky. Dora různě natáčela obruč a mumlala si: malý tok rybiček, maximální tok rybiček, nulový tok rybiček, záporný tok rybiček. To už Karlovi opravdu přišlo divné a nezbývalo, než si to nechat vysvětlit.*

Mějme proud rybiček jako na obrázku 20 a obruč, kterou vůči směru proudu různě natáčíme. Obruč má k sobě přidělanou šipku kolmou na plochu obruče, která určuje orientaci obruče v prostoru. Pokud je šipka ve směru proudu rybiček, tak obručí skutečně proteče nejvíce ryb. Když bude šipka kolmo na směr toku, tak naopak obručí neprotečou žádné rybičky – tomu Dora říkala nulový tok rybiček. Když naopak obruč otočíme tak, že šipka míří proti toku, a rybičky vzhledem k obruči protékají opačným směrem než původně, pak řekneme, že jejich tok obručí je záporný. Když obručí plynule otáčíme, tak se tok rybiček obručí postupně mění, jak znázorňuje graf. Počet rybiček, které procházejí obručí, tak závisí na orientaci obruče a proudu, na ploše obruče a na hustotě a rychlosti rybiček. Pojem tok je ve fyzice významný, zejména v oblasti magnetismu, jak se ukáže později. Tuto myšlenku si podržíme.



Obrázek 21: Jednotková kružnice

## 5 Zavedení funkcí sinus a kosinus pro obecný úhel

### 5.1 Jednotková kružnice

*Karel chtěl pozvat Dorku do kina, ale všechny filmy mu připadaly nějak nudné až pitomé, a tak si řekl, že ji prostě pozve na dětské hřiště, kde je hezký kolotoč. Chvilí nad tím pochyboval a za normálních okolností by mu to přišlo infantilní, ale už poznal, že Dora není ledažaká a že ji někdy zaujmou věci, o které by jiný ani nezavadil. Takže už se navnadil, že se spolu budou točit na kolotoči a jen trnul, čím ho zase Dora překvapí... Na hřišti bylo několik kolotočů různých velikostí. Karel už začal mířit k tomu největšímu, jenže Dora ho naopak táhla k tomu nejmenšímu. Na velký kolotoč máš ještě čas, pravila Dora starostlivě, a posadila Karla na kolotoč o poloměru pouhý jeden metr. Do prašné země pod kolotočem potom patou vyryla dvě kolmé čáry a označila je jako osu  $x$  a osu  $y$ . Pak se jala vyprávět...*

Karel sedí na kolotoči o poloměru  $r = 1$ , čili sedí na takzvané *jednotkové kružnici*. Polohu Karla je možné popsat pomocí úhlu otočení  $\varphi$ , jako je na obrázku 21. Pak je možné získat souřadnice Karla na obvodu kružnice jako

$$x = \cos \varphi \quad (4)$$

$$y = \sin \varphi \quad (5)$$

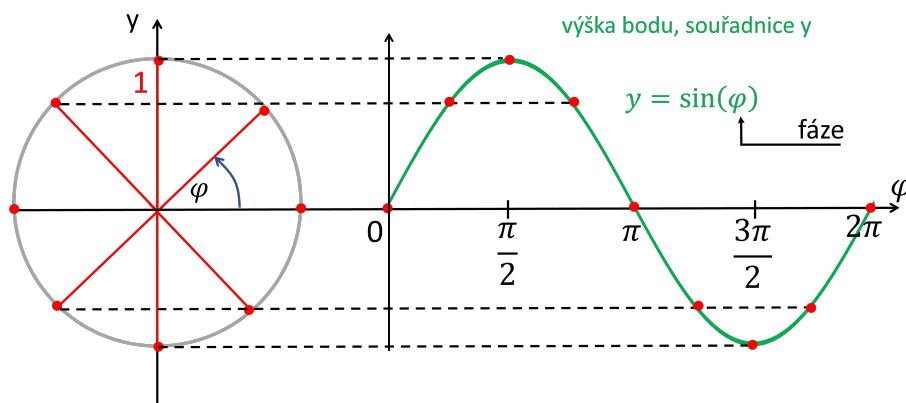
Hodnoty funkcí kosinus a sinus tedy odpovídají souřadnicím  $x, y$  bodu na jednotkové kružnici. Dosud víme, jaké jsou hodnoty goniometrických funkcí pro úhly mezi  $0$  a  $90^\circ$ , neboli  $0$  až  $\frac{\pi}{2}$  radiánů. Co když se kolotoč s Karlem otočí o větší úhel? Není to žádný problém.

Pro úplně libovolný úhel otočení kolotoče můžeme určit  $[x, y]$  souřadnice Karla v rovině. Co kdybychom hodnoty goniometrických funkcí nedefinovali pomocí poměrů stran v pravoúhlém trojúhelníku jako doposud, ale právě jako souřadnice  $x, y$  bodu, který se o určitý úhel  $\varphi$  otočí po obvodu jednotkové kružnice? Ano, přesně takhle můžu nově určovat hodnotu funkce sinus a kosinus pro úplně libovolný úhel! Sinus bude  $y$ -ová souřadnice bodu na kružnici o poloměru 1, a kosinus bude  $x$ -ová souřadnice bodu na této jednotkové kružnici. No a konečně tangens bude podíl  $y/x$ , protože  $\tan \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$ . Mám na to jedno anglické přísloví: "Once you get to know jednotková kružnice, you will never look back." Kdykoli budeš řešit úlohu se siny a kosiny, tak si nakreslíš jednotkovou kružnici a rozlije se ti po těle pocit štěstí a jistoty.

Když se Karel na kolotoči bude točit, tak se postupně bude měnit úhel  $\varphi$  popisující jeho polohu a postupně se taky bude měnit jeho souřadnice  $x$  a  $y$ . Když se bude točit proti směru hodinových ručiček, tak úhel otočení  $\varphi$  bude narůstat, když po směru ručiček, tak bude klesat. Pohybem po směru ručiček tedy jeho úhel otočení může být klidně záporný. Když kolotoč otočíme o  $300^\circ$  proti směru ručiček, tedy v kladném směru, tak to je z pohledu výsledné polohy stejné, jako když ho otočíme o  $60^\circ$  v záporném směru. Jinými slovy  $+300^\circ \leftrightarrow -60^\circ$ . Podobně když kolotoč otočíme o  $500^\circ$ , tak je poloha stejná jako když ho otočíme o  $500^\circ - 360^\circ = 140^\circ$ .

*V tom Dora Karla roztočila proti směru hodinových ručiček...*

Úhel otočení postupně narůstal a měnily se i souřadnice  $[x, y]$  určující Karlovu polohu.  $Y$ -ová souřadnice nejdříve narůstala, ale při dosažení  $90^\circ = \pi/2$  dosáhla maxima, tedy hodnoty 1, a začala postupně klesat. Při překročení  $180^\circ = \pi$   $y$ -ová souřadnice prošla nulou a stala se záporná a byla čím dál zápornější. Při překonání  $270^\circ = 3\pi/2$  dosáhla hodnoty  $-1$  a pak zase začala stoupat. Když se kolotoč otočil o úhel  $360^\circ$  zase do původní



Obrázek 22: Funkce sinus jakožto  $y$ -ová souřadnice bodu na jednotkové kružnici.

polohy, tak souřadnice byla opět 0. Jenže souřadnice  $y$  odpovídá hodnotě sinu daného úhlu. Když tedy pro každý úhel  $\varphi$  zaznameneáme souřadnici  $y$ , tak vlastně zaznameneáme hodnotu  $\sin \varphi$ . Když si vytvoříme tabulku dvojic  $(\varphi, \sin \varphi)$  a vyneseme do grafu, tak dostaneme graf jako na obrázku 22. Argument funkce sinus, zde úhel  $\varphi$ , se často označuje jako *fáze*. S tímto slovem se budeme dále setkávat.

Kolotoč ale můžeme klidně otočit o více než  $360^\circ$ . Nebo ho můžeme otáčet opačným směrem, po směru hodinových ručiček, čímž se dostaneme do záporných úhlů a vždy zase můžeme zaznamenat souřadnici  $y$  a tedy hodnotu  $\sin \varphi$ . Hodnotu  $\sin \varphi$  tak můžeme přisoudit jakémukoli úhlu  $\varphi$  a prodloužit graf do plus nekonečna i do minus nekonečna. Podobně tak s kosinem, kde však sledujeme souřadnici  $x$ .

Z naší nové definice funkcí kosinus a sinus pomocí ztotožnění se souřadnicemi  $[x, y]$  na jednotkové kružnici jde pohledem na obrázek vyvodit několik zajímavých vlastností těchto funkcí. Když si namísto úhlu  $\varphi$  vezmeme stejně velký záporný úhel  $-\varphi$ , tak odpovídající bod na jednotkové kružnici se překlopí okolo vodorovné osy  $x$ . Tím se výška bodu změní na opačnou, avšak  $x$ -ová souřadnice se nezmění. To znamená, že

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \quad , \quad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$

Kosinus proto patří mezi sudé funkce, zatímco sinus patří mezi liché funkce.

## 5.2 Polární souřadnice

*A pojed' už konečně na ten větší kolotoč. Dora vzala Karla za ruku a dovedla ho ke kolotoči. Teď se konečně Karlovi rozlil po těle pocit štěstí, ale nepřipisoval to svému nedávnému seznámení s jednotkovou kružnicí.*

Karel si sednul na kolotoč o poloměru  $R$  a Dora ho roztočila. Poloha Karla vůči středu kolotoče v určitou chvíli je definována poloměrem kolotoče  $R$  a úhlem otočení  $\varphi$ . Zřejmě pak jeho souřadnice  $[x, y]$  lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \\ y &= R \sin \varphi \end{aligned}$$

Stejně tak poloha Dory na zemi by vzhledem ke středu kolotoče šla popsat buď pomocí kartézských souřadnic  $[x, y]$ , nebo pomocí vzdálenosti od středu kolotoče  $r$  a pomocí úhlu  $\varphi$ . Úhel  $\varphi$  hraje roli azimutu, jak někdo zná třeba z orientačního běhu. Hovoříme pak o určení polohy pomocí *polárních* souřadnic (obrázek 23). Polární souřadnice se často používají ve fyzice, třeba při analýze pohybu planet kolem Slunce.

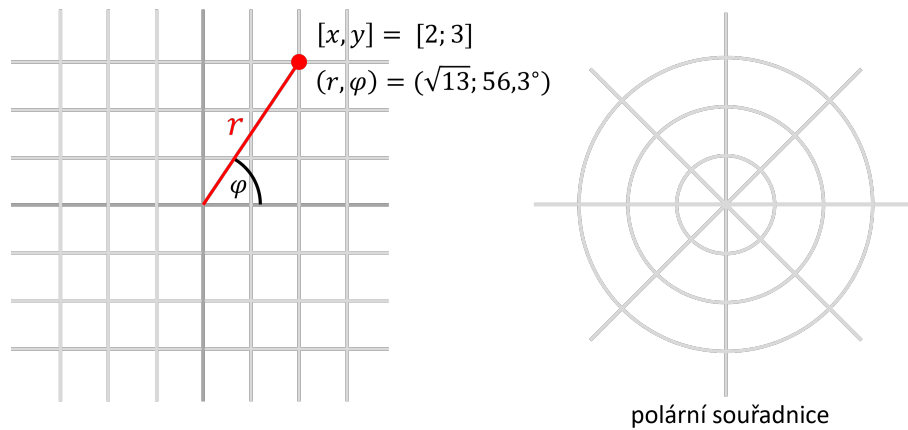
*Dokážete určit obrácený převodní vztah, tedy jak při znalosti kartézských souřadnic  $[x, y]$  určit hodnoty polárních souřadnic  $(r, \varphi)$ ? Když kartézské souřadnice Dory budou  $[5; -3]$ , jak popíšeme její polohu v polárních souřadnicích?*

## 5.3 Parametry otáčivého pohybu

Karel poslouchá a dále se otáčí na kolotoči o poloměru  $R$ . V každý moment, tedy v každý čas  $t$ , můžeme určit jeho polohu. Sledujme nyní jen  $y$ -ovou souřadnici Karla, která se v čase mění. Ta lze popsat jako

$$y(t) = R \sin \varphi(t) ,$$

kde zápis  $y(t)$  zdůrazňuje, že  $y$  závisí na čase  $t$ .



Obrázek 23: Polární souřadnice

Otáčení kolotoče jde charakterizovat periodou otáčení  $T$ , tedy dobou trvání jedné otočky. Když je perioda  $T$  dlouhá, tak je otáčení pomalé a naopak. Někdy se hovoří také o frekvenci otáčení  $f$ . Pokud je perioda třeba půl sekundy, tak se kolotoč otočí  $2\times$  za sekundu a řekneme, že  $f = 2$  Hertz (jednotka Hertz je to samé jako  $s^{-1}$ , čteme "za sekundu"). Pokud je perioda  $T = 4s$ , tak frekvence je  $\frac{1}{4} s^{-1}$ . Frekvence tedy značí počet otoček ze sekundu. Mezi těmito dvěma veličinami zřejmě platí vztah

$$f = \frac{1}{T}.$$

Jakou rychlostí  $v$  se Karel pohybuje? Rychlost spočítáme tak, že určíme uraženou dráhu  $s$  za nějaký časový úsek  $t$  a spočteme

$$v = \frac{s}{t}.$$

Za jednu periodu  $T$  se otočí kolem dokola po obvodu kruhu a urazí tak dráhu  $s = 2\pi R$  a tedy

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f \quad (6)$$

Tomu se říká obvodová rychlost. Na příklad když jedna otočka trvá 4 s a poloměr kolotoče jsou 3 metry, tak rychlost sedačky vůči zemi je  $v = \frac{3\pi}{2} \text{ m/s} \approx 4,7 \text{ m/s}$ .

Velice důležitá je veličina *úhlová frekvence* neboli *úhlová rychlost*, která se značí  $\omega$ . Běžná rychlost vyjadřuje, kolik objekt urazí metrů za sekundu. Úhlová rychlost analogicky vyjadřuje, o kolik radiánů za sekundu se objekt otočí. Definiční vztah je

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

tedy změna úhlu za čas. Tak například pokud perioda bude  $T = 4s$ , tak za jednu periodu se objekt otočí o celou otočku, což odpovídá úhlu  $\Delta\varphi = 2\pi$ , a počítáme

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Pro úhlovou rychlost přirozeně platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

protože za dobu  $T$  je uražený úhel celý kruh, neboli  $2\pi$ . Ze vztahu 6 také vidíme, že platí

$$v = \omega R.$$

Všichni víme, že uraženou dráhu spočteme jako  $s = vt$ . Podobně ale můžeme pomocí úhlové rychlosti spočítat uražený úhel

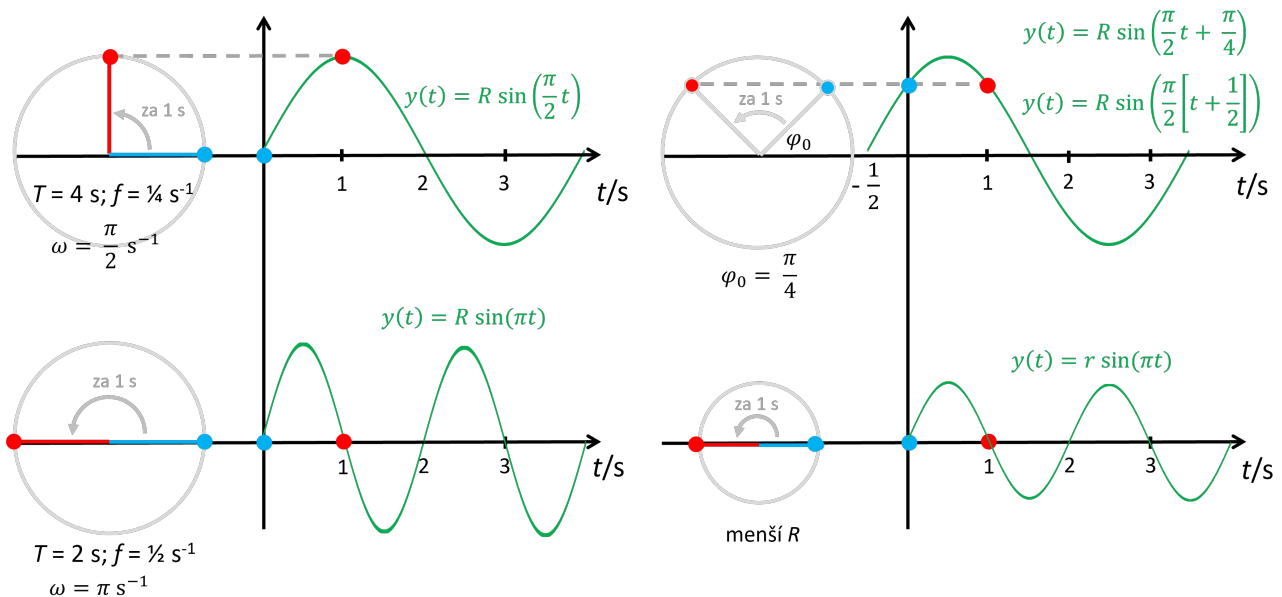
$$\varphi(t) = \omega t.$$

Pokud tedy je  $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$ , tak třeba za 6 s Karel na kolotoči urazí úhel  $\varphi = 3\pi$ , což je jeden a půl otočky. Ypsilonovou souřadnici Karla tak můžeme psát jako

$$y(t) = R \sin \varphi = R \sin(\omega t) = R \sin(2\pi f t) = R \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Analogicky bychom v případě  $x$ -ové souřadnice jen nahradili sinus kosinem.

*Zkuste zapsat  $y$ -ovou souřadnici Karla v závislosti na čase, pokud se kolotoč o poloměru 3m: a) otočí jednou za 5 sekund, b) otočí třikrát za sekundu c) otočí  $10\times$  za minutu d) otočí o úhel  $90^\circ$  za dvě sekundy.*



Obrázek 24: Vliv parametrů na graf funkce  $y(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

## 5.4 Graf funkce sinus

Podívejme se nyní, jak bude v grafu vypadat  $y$ -ová souřadnice Karla, když se bude otáčet na různých kolotočích různou rychlostí.

Vyjdeme ze situace, kdy se otáčí na kolotoči o poloměru  $R$  úhlovou rychlostí  $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$ . Za sekundu tedy udělá čtvrt otočky a jedna otočka pak trvá  $T = 4 \text{ s}$ . Na obrázku 24 vlevo nahoře vidíme nám již známý graf. Celou vlnku graf udělá za 4 s, tedy za dobu jedné periody  $T$ .

Když bude úhlová rychlost otáčení dvojnásobná,  $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ , tak za jednu sekundu kolotoč udělá půl otočky (obrázek 24 vlevo dole). Perioda bude poloviční,  $T = 2 \text{ s}$ , a celou vlnku graf udělá za poloviční dobu. Kopečky grafu jsou pak nahuštěnější. Kdyby naopak byla úhlová rychlost menší a perioda delší, tak budou kopečky řidší.

Pokud by Karel už na začátku měření času, tedy v čase  $t = 0$ , byl nějak pootočen od výchozí pozice o úhel  $\varphi_0$ , tak by šlo psát

$$y(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Pokud je toto počáteční pootočení kladné číslo, tak to je jako kdyby se Karel začal otáčet už někdy dříve a v čase 0 už má něco 'naděláno'. V obrázku 24 vpravo nahoře je situace, kdy v počátku měření času byl už Karel pootočen o úhel  $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . Proto je graf posunutý doleva, jakoby začal s předstihem. Když by naopak  $\varphi_0$  bylo záporné číslo, tak se graf posune doprava. Jelikož vodorovná osa určuje čas, tak posun grafu doleva či doprava není o hodnotu  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ , nýbrž o čas, jak dlouho trvá urazit tento úhel, tedy o

$$\Delta t = \frac{\varphi_0}{\omega} = \frac{1}{2} \text{ s}.$$

Nakonec pokud by kolotoč měl jiný poloměr, třeba menší, tak hodnoty  $y$ -ové souřadnice Karla budou dosahovat menších hodnot a graf se sníží (obrázek 24 vpravo dole).

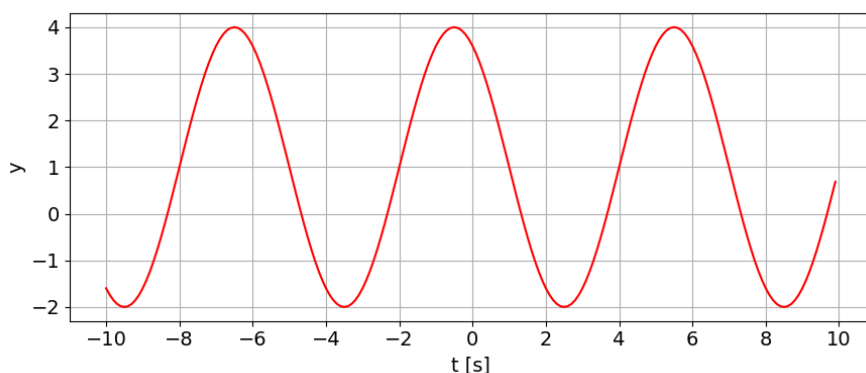
Nyní tedy rozumíme tomu, jak jednotlivé parametry ovlivňují vzhled grafu funkce  $y(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0)$ . Podobně by tomu bylo pro kosinus. K funkci by mohl přibýt ještě jeden parametr, a sice  $y_0$ , který by značil ypsilonou souřadnici středu kola, či jinak řečeno výšku středu kola. Funkce by pak měla tvar

$$y(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0) + y_0.$$

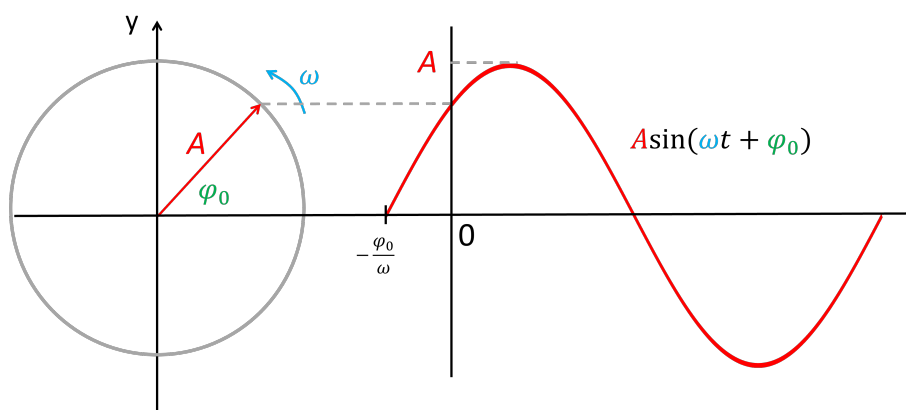
Graf funkce by se jednoduše posunul o hodnotu  $y_0$  nahoru.

Pokud bychom někde viděli, že máme vyšetřit, jaký vliv mají jednotlivé parametry na průběh funkce  $y(x) = A \sin(bx + c) + d$ , tak se nenecháme zmást, protože to je úplně to samé, jako jsme právě udělali. Jen místo  $R$  je  $A$ , místo  $\omega$  je  $b$ , místo  $\varphi_0$  je  $c$  a místo  $y_0$  je  $d$ .

*Jako cvičení se pokuste: a) Nakreslit graf  $y$ -ové souřadnice Karla, pokud se točí na kolotoči o poloměru 2 metry a jedna otočka trvá 3 sekundy. b) Nakreslit graf  $y$ -ové souřadnice Karla, pokud se točí na kolotoči o poloměru 2 metry a za jednu sekundu se otočí o  $60^\circ$ , přičemž na začátku byl již pootočen o úhel  $90^\circ$ . c) Nakreslit graf funkce  $y(x) = 5 \sin(2x + 1) - 2$ . d) Zapsat rovnici funkce, kterou vidíte na obrázku 25.*



Obrázek 25: Cvičení: Zapište předpis funkce v grafu



Obrázek 26: Reprezentace sinusovky fázorem

## 5.5 Fázory

*Karle, pojd' si zahrát slovní fotbal! žadonila Dora. Nechci. Chcípák. Páka. Kazisvět. Světlo. Lotr. Trefa. Fázor. Prohrálas, to slovo neexistuje! Posmívá se Karel. Existuje, tys prohrál!, a smála se, až se za břicho popadala.*

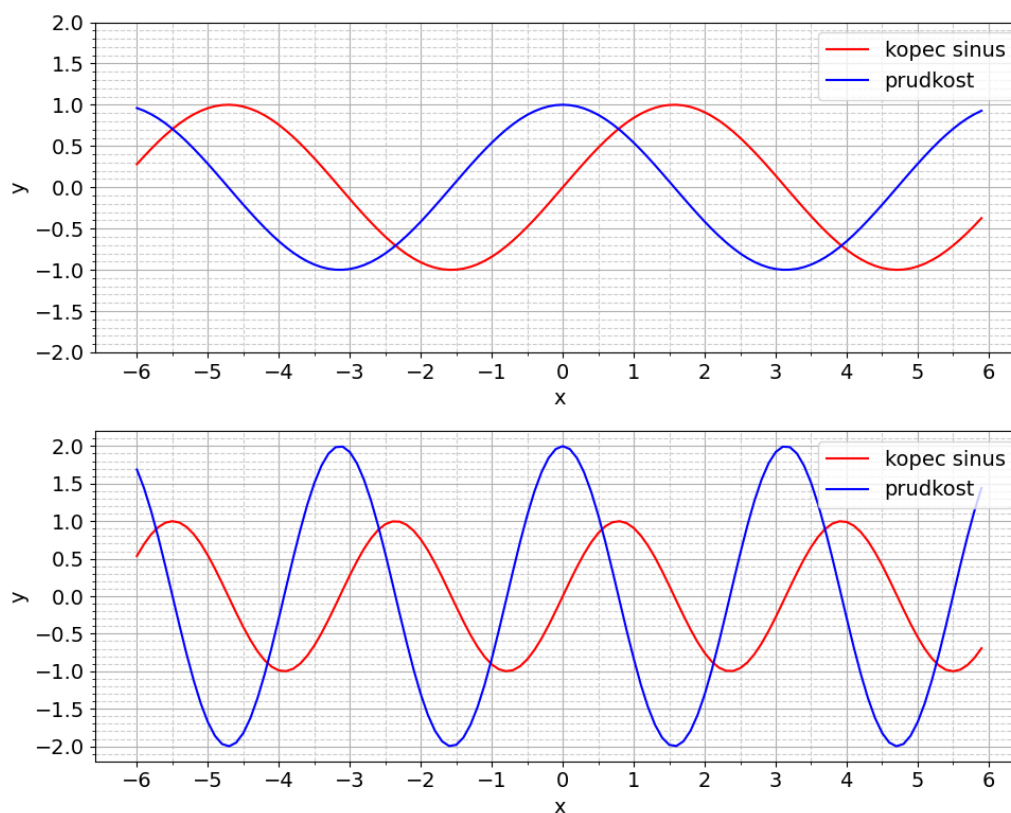
Funkce  $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$  je charakterizovaná třemi parametry: amplitudou  $A$ , úhlovou frekvencí  $\omega$  a počáteční fází  $\varphi_0$ . K funkci můžeme nakreslit její graf. Tuto funkci ale můžeme reprezentovat i v obrázku pomocí takzvaného fázoru (obr. 26). Slovo fázor vzniklo spojením slov *fáze* a *vektor*. Délka vektoru odpovídá amplitudě funkce  $A$ . Otočení vektoru v obrázku pak odpovídá počáteční fázi  $\varphi_0$ . Koncový bod vektoru se pak otáčí po kružnici o poloměru  $A$  úhlovou rychlostí  $\omega$ . Hodnota funkce  $y$  je pak dána jako vertikální poloha koncového bodu fázoru. Fázory se velmi hodí ve chvíli, kdy chceme sčítat několik funkcí sinus. Tyto funkce si totiž můžeme nakreslit jako vektory (fázory) a sčítat je, což si umíme hezky graficky představit. Příklady využití reprezentace pomocí fázorů si ukážeme záhy.

## 5.6 Prudkost kopce sinus

*V sobotu Karel a Dora vyrazili na výlet do Krkonoš. Oba totiž milují hory. Stáli na začátku trasy a naskytnul se jim krásný pohled na celý hřeben, který budou přecházet. Podívej, Karle, ten horský hřeben vypadá jako funkce sinus! tetelila se Dora. Pravdu díš, odvětil Karel po staru, jak slyšel v jednom filmu. Ale podívej, když jsi na vrcholku, tak je tam skoro rovinka, stejně jako v sedlech mezi vrcholy. Největší námaha nás ale čeká právě mezi vrcholem a sedlem, tam bývají svahy nejprudší. . .*

Graf funkce sinus vypadá jako kopcovité prostředí (pohoří), kde pořád chodíme nahoru a dolů. Projdeme se po těchto kopcích zleva doprava a sledujme, jak se v průběhu procházky mění prudkost svahu, po kterém zrovna jdeme. Prudkost kopců popsaných jako  $y(x)$  budeme značit  $y'(x)$ . Pro funkci  $y = \sin x$  v nejprudších místech při posunu o kousíček  $\Delta x$  doprava se posuneme o stejně velké  $\Delta y$  nahoru (obrázek 27). Prudkost svahu je pak

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$



Obrázek 27: Prudkost změny funkce  $\sin x$  a funkce  $\sin 2x$ .

V nejprudších místech z kopce je prudkost stejná, ale protože ztrácíme výšku, tak tam prudkost bude záporná, -1. Na vrcholcích kopců je svah docela mírný a na úplném vrcholku jakoby to byla skoro rovinka, tedy prudkost 0. Mezi těmito diskutovanými místy se prudkost plynule mění. Můžeme tak vynést přibližný graf prudkosti svahu v závislosti na místě, kde se nacházíme. Graf podezřele vypadá jako kosinus  $\cos x$ , ale nemáme pro to zatím žádný důkaz. Nicméně budeme nyní věřit, že to skutečně je kosinus.

Co by se stalo s grafem prudkosti svahu, kdyby kopečky byly dvakrát vyšší, tedy  $y = 2 \sin x$ ? Zjevně budou prudkosti také dvakrát větší,  $y' = 2 \cos x$ .

Co kdyby kopečky byly dvakrát blíže u sebe, tedy  $y = \sin 2x$ ? Pak vidíme, že prudkosti také vzrostou a platí  $y' = 2 \cos 2x$ .

Co kdybychom pohoří posunuli celé doprava nebo doleva, tedy  $y = \sin(x + x_0)$ ? Pak se velikosti prudkostí nijak nezmění, jen se samozřejmě graf prudkosti posune spolu s pohořím, neboli  $y' = \cos(x + x_0)$ .

Když to vše shrneme, tak pokud je pohoří popsáno vztahem

$$y = A \sin(bx + c),$$

tak prudkost pohoří v závislosti na poloze je dána jako

$$y' = Ab \cos(bx + c).$$

Pro prudkost změny  $y$ -ové souřadnice pro otáčení kolotoče v čase samozřejmě platí analogicky

$$y' = R\omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Kdybychom si nakreslili pohoří ve tvaru funkce kosinus, kterážto je vlastně jen posunutou funkcí sinu, tedy

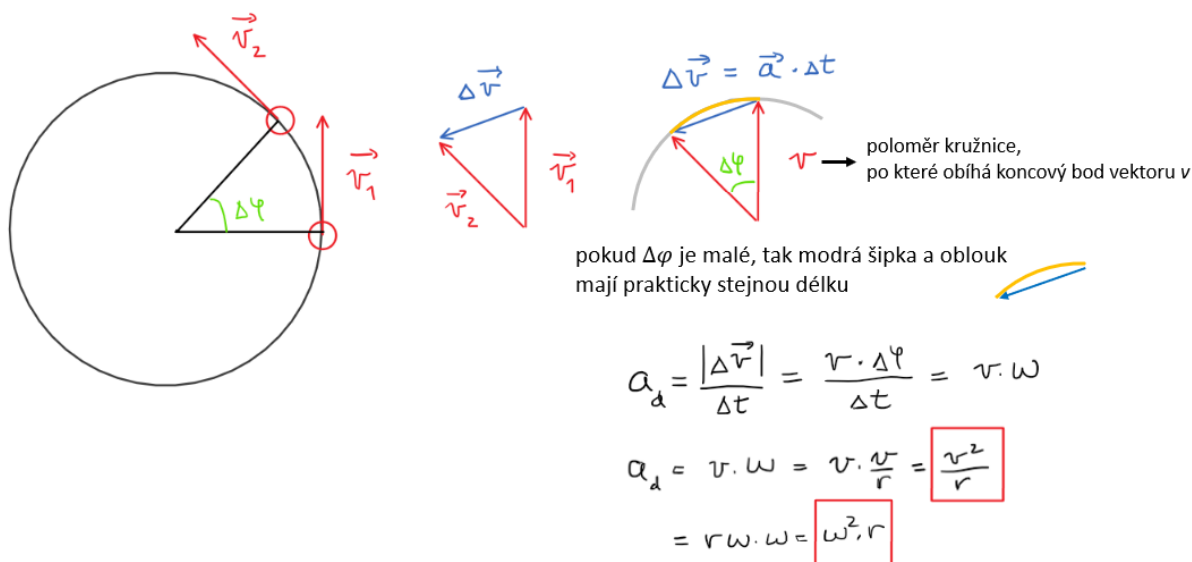
$$y = A \cos(bx + c)$$

tak bychom analogicky vyvodili, že pro prudkost platí

$$y' = -Ab \sin(bx + c).$$

*Jako cvičení určete, pro která  $x$  je prudkost funkce  $\frac{1}{2} \sin(3x + 2) + 1$  rovna jedné.*





Obrázek 28: Velikost dostředivého zrychlení

## 5.7 \*Rychlost a zrychlení na kolotoči

*Při čekání na autobus ve Špindlerově mlýně si Dora a Karel šli ukrátit chvíli a zavzpomínat si na nedávnou návštěvu dětského hřiště. Tentokrát si na kolotoč sedla Dora a Karel roztácel. . .*

Dora se otáčí na kolotoči poloměru  $R$  úhlovou rychlostí  $\omega$ . Dříve jsme ukázali, že její obvodová rychlost má velikost

$$v = \omega r$$

přičemž směr rychlosti je neustále tečný ke kružnicové trajektorii.

Co zrychlení? Zrychlení odpovídá časové změně rychlosti

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Vektor rychlosti se mění směrem naznačeným v obrázku 28, takže vektor zrychlení míří směrem do středu otáčení (takzvané dostředivé zrychlení úzce spojené s dostředivou silou), vždy kolmo na směr rychlosti. Možná si vybavíte, že platí

$$a = v\omega = \omega^2 R.$$

Proč to platí? Opět napoví obrázek 28. Když se polohový vektor otočí o úhel  $\Delta\varphi$ , tak se o stejný úhel otočí i vektor rychlosti, jehož velikost je  $v = \omega r$ . Velikost zrychlení je

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Velikost změny rychlosti  $\Delta v$  ale prakticky odpovídá délce oblouku, který opsal konec vektoru  $\vec{v}$ , pokud  $\Delta\varphi$  je velmi malé. Délka tohoto oblouku je patrně  $v\Delta\varphi$ . Proto

$$|a| = \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} = v\omega = \omega^2 r.$$

Tímto jsme ukázali platnost známého vztahu pro dostředivé zrychlení.

Podívejme se nyní, jak se v čase chovají y-ová souřadnice polohy, a y-ová složka rychlosti a zrychlení. Y-ová poloha Dory se mění jako

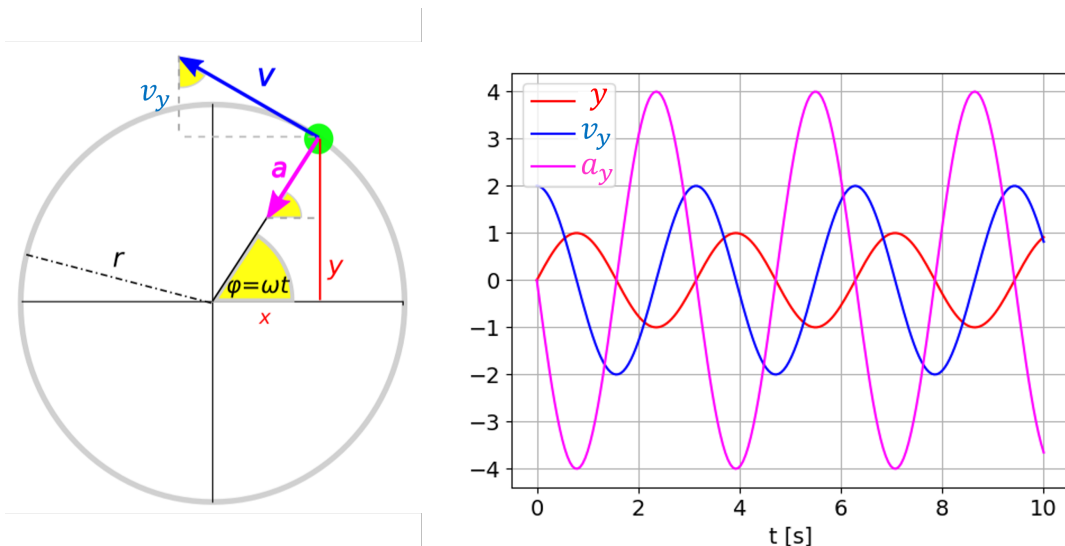
$$y = R \sin \omega t.$$

Z obrázku 29 je patrné, že pro y-ovou složku rychlosti platí

$$v_y = v \cos \varphi = \omega R \cos \varphi$$

Konečně y-ová složka vektoru zrychlení je

$$a_y = -a \sin \varphi = -\omega^2 R \sin \omega t = -\omega^2 y.$$



Obrázek 29: Poloha, rychlost a dostředivé zrychlení při pohybu po kružnici.

Jednotlivé funkce jsou vyneseny v grafu v obrázku.

My však víme, že rychlost je derivací polohové souřadnice a zrychlení je derivací rychlosti, neboli zrychlení je druhou derivací polohové souřadnice. Získané vztahy proto můžeme psát i takto

$$\begin{aligned} y &= R \sin \omega t \\ v_y = y' &= R\omega \cos \omega t \\ a_y = y'' &= -R\omega^2 \sin \omega t = -R\omega^2 y \end{aligned}$$

Tyto vztahy platí i pro rychlost a zrychlení kmitavého pohybu, který si rozebereme později. Zároveň si ale můžeme všimnout, že jsme tímto ukázali platnost vztahů pro prudkost kopce z předchozí kapitoly. Skutečně vidíme, že prudkost funkce sinus odpovídá funkci kosinus a navíc prudkost funkce kosinus odpovídá funkci  $-\sin$ .

## 5.8 Sinus, kosinus a tangens maličkých úhlů

*Karle, kdybych já byla funkce sinus, jaká funkce bys chtěl být ty, aby ses mi mohl co nejvíce přiblížit? zeptala se lišáčky Dora.*

Sinus, kosinus a tangens jsou funkce s komplikovaným průběhem. Nepatří mezi algebraické funkce, což znamená, že není možné např.  $\sin(x)$  vyjádřit pomocí konečného počtu jednoduchých operací jako sčítání, násobení, dělení, nebo umocňování. Mnohdy se však hodí vyjádřit goniometrické funkce aspoň přibližně pomocí polynomu. Jinými slovy chceme najít takový polynom, aby

$$\sin(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$$

Když se podíváme na graf funkce sinus a tangens (obrázek 30 nahoře vlevo), tak vidíme, že v okolí počátku souřadnic jsou tyto funkce krásně kopírovány obyčejnou lineární funkcí  $y = x$ . To je nádherná aproximace. Když jsou úhly docela malé, tak v mnoha případech můžeme využít přiblížení

$$\sin x \approx \tan x \approx x.$$

Samozřejmě  $x$  je úhel v radiánech, nikoli ve stupních!

Pro jak velké úhly ještě můžeme tuto aproximaci použít? To záleží na tom, s jakou nepřesností jsme ochotni se smířit. V grafu 30 vpravo dole vidíme, že pokud tolerujeme maximální nepřesnost 5%, tak aproximaci můžeme používat do úhlu o velikosti zhruba  $30^\circ$  pro funkci sinus a do úhlu asi  $20^\circ$  pro funkci tangens.

Graf 30 vpravo nahoře zobrazuje funkci kosinus. Tu zjevně nejde vůbec aproximovat funkcí  $y = x$ .

*Pokuste se přijít na to, jaký předpis má kvadratická funkce na obrázku, která dobře aproximuje kosinus pro malé úhly.*

V obrázku je vidět, že pro  $x = 0$  je  $y(0) = 1$  a tedy kvadratická funkce obsahuje absolutní člen  $a_0 = 1$ . Dále je patrné, že zobrazená funkce je sudá, tedy  $y(x) = y(-x)$ . Z toho plyne, že hledaný polynom neobsahuje

lineární člen, tedy  $a_1 = 0$ . Nakonec je vidět, že  $y(2) = -1 = 1 - a_2x^2 = 1 - 4a_2$ , odkud zřejmě  $a_2 = \frac{1}{2}$ . Aproximace funkce kosinus pro malé úhly je tedy

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Z grafu procentuální odchylky v obrázku 30 je patrné, že tato aproximace kosinu je přesnější než aproximace sinu a tangensu funkcí  $y = x$ . Je to proto, že nyní už se jedná o polynom druhého stupně, který je schopen zachytit křivost funkce.

Co kdybychom se ale pokusili najít nějaký polynom vyššího stupně, který by lépe aproximoval funkci sinus, třeba polynom třetího stupně? Takový polynom skutečně existuje.

*Z obrázku se pokuste určit předpis pro kubický polynom, který aproximuje funkci sinus v okolí počátku soustavy souřadné. Můžete se inspirovat úvahami provedenými pro kosinus.*

Hledaný polynom má absolutní člen nulový, protože funkce prochází počátkem souřadné soustavy. Lineární člen  $x$  zůstává, protože jen upřesňujeme předchozí aproximaci. Bude polynom obsahovat kvadratický člen? Nebude, protože funkce sinus je lichá. Hledáme tak koeficient ve členu  $a_3x^3$ . V obrázku vidíme

$$\begin{aligned} y(x) &= x + a_3x^3 \\ y(3) &= -1,5 = 3 + a_33^3 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

a proto vylepšená aproximace je

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

Z grafu je zřejmé, že tato aproximace funguje velice dobře pro úhly až do jednoho radiánu.

Uvedené aproximace se ve fyzice zhusta používají. Možná vás napadne, jestli by třeba funkce sinus a kosinus nešly aproximovat ještě lépe, kdybychom použili polynomy vyšších stupňů (pátého, sedmého ...). A skutečně, jde to! Koho to zajímá, necht si vyhledá heslo *Taylorův rozvoj* či *Taylorova řada*.

Závěrem ještě uvedeme jednu aproximaci, která sice nesouvisí s goniometrickými funkcemi, ale velice často se používá ve fyzikálních úvahách. Na obrázku 31 si všimněte grafu funkce

$$y = \sqrt{1+x} \equiv (1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

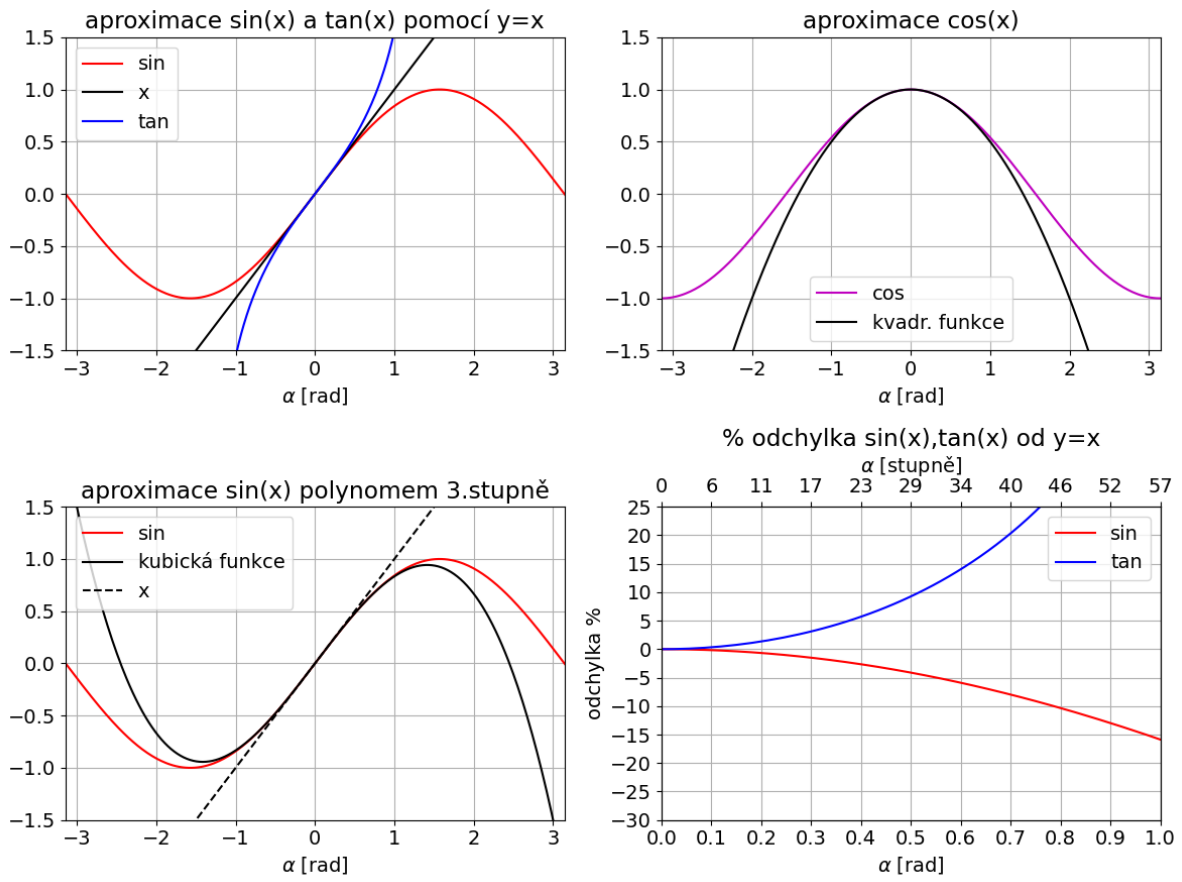
V okolí bodu  $x = 0$  jsou hodnoty odmocniny velmi podobné hodnotám zakreslené lineární funkce.

*Jaký předpis má zakreslená lineární funkce, která v okolí  $x = 1$  aproximuje funkci  $y = \sqrt{1+x}$ ?*

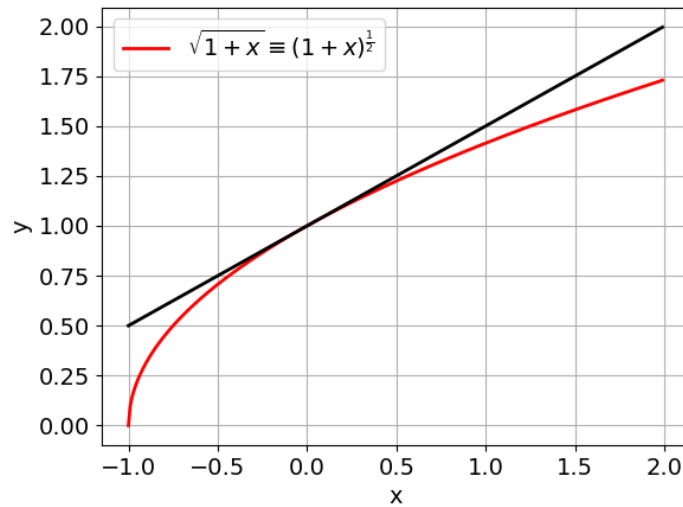
Hledaná lineární funkce má zjevně předpis  $y = 1 + \frac{x}{2}$ . Pro malá  $x$ , kde  $x \ll 1$ , lze proto mnohdy použít aproximaci

$$y = \sqrt{1+x} \equiv (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

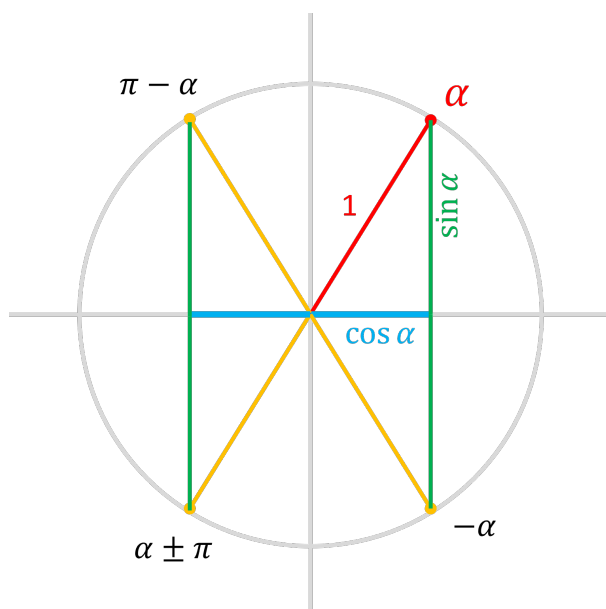
*Neujde naší pozornosti, že aproximace je ve tvaru  $(1+x)^p \approx y = 1+px$ . Zamyslete se, jestli taková aproximace bude platit i pro jiná čísla  $p$  nežli je  $\frac{1}{2}$ .*



Obrázek 30: Aproximace goniometrických funkcí polynomem.



Obrázek 31: Aproximace funkce  $y = \sqrt{1+x}$  lineární funkcí  $y = 1 + \frac{x}{2}$  v okolí  $x = 0$



Obrázek 32: Goniometrické funkce pro úhly  $\alpha$ ,  $\alpha \pm \pi$ ,  $\pi - \alpha$ .

## 6 Goniometrické vzorce

### 6.1 Základní vztahy

Některé ze základních vztahů už byly zmíněné, ale nezaškodí je zopakovat. Vezměme si pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 1. Délky odvěsen pak jsou  $a = \sin \alpha$  a  $b = \cos \alpha$ . Podle Pythagorovy věty je  $a^2 + b^2 = 1$  a platí tedy významná identita

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Z pozorování v jednotkové kružnici (obrázek 32) plynou následující vztahy

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos(\alpha) \end{aligned}$$

### 6.2 Součtové vzorce

Všichni to známe z nějakého grafického počítačového programu: máme nějakou šipku, která začíná v bodě  $[0, 0]$  a končí v bodě  $[x, y]$ . Ve fyzikálně-matematické hantýrce bychom řekli, že je to vektor, který lze zapsat ve složkách jako  $\vec{c} = (x, y)$ . Aby se nám to nepletlo, složky vektoru si však radši označíme jako  $a, b$ :  $\vec{c} = (x, y) \equiv (a, b)$ . Tuto šipku (vektor) chceme otočit kolem jejího počátečního bodu třeba o úhel  $\beta = 30^\circ$  oproti původní poloze. Program to hravě zvládne. Jenže program nejdříve musí vypočítat novou polohu koncového bodu  $[x', y']$ . Jak to udělá?

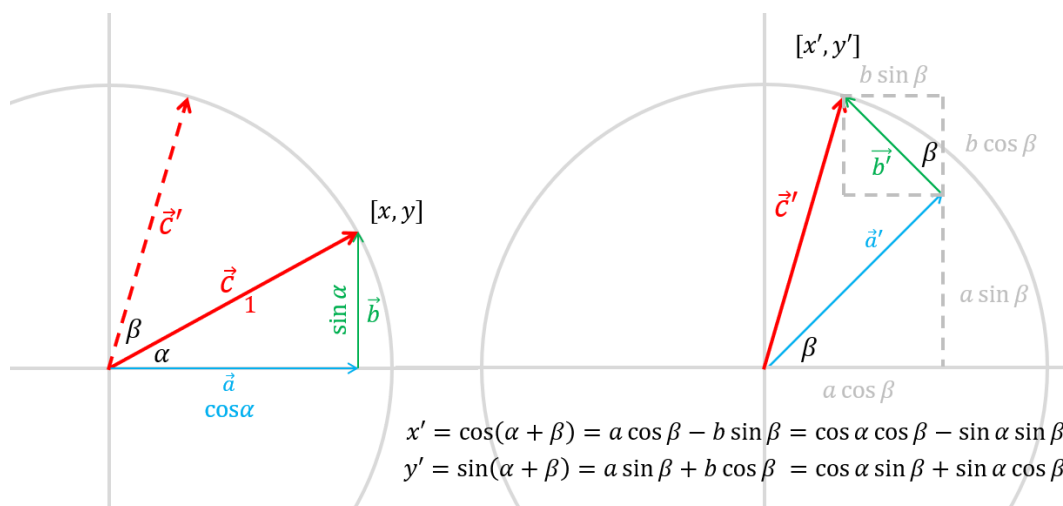
Pro jednoduchost si vezměme šipku délky  $c = 1$ . V počáteční poloze je úsečka už otočená o úhel  $\alpha$  vůči vodorovnému směru (osa  $x$ ). Již víme, že poloha koncového bodu pak lze napsat jako

$$[x, y] = [\cos \alpha, \sin \alpha].$$

V nové poloze bude úhel odchýlení od vodorovného směru roven  $\alpha + \beta$  a nový koncový bod proto bude mít souřadnice

$$[x', y'] = [\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)].$$

V obrázku 33 je situace znázorněná.



Obrázek 33: Odvození součtových vzorců

Vektor  $\vec{c}$  můžeme napsat jako součet dvou vektorů  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , z nichž první míří jen do směru x a druhý jen do směru y. Když otočíme horizontální vektor  $\vec{a}$  o délce  $a = \cos \alpha$  o úhel  $\beta$ , dostaneme vektor

$$\vec{a}' = (a \cos \beta, a \sin \beta) = (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta).$$

Když naopak otočíme vertikální vektor  $\vec{b}$  o délce  $b = \sin \alpha$  opět o úhel  $\beta$ , dostaneme vektor

$$\vec{b}' = (-b \sin \beta, b \cos \beta) = (-\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta).$$

Po provedeném otočení vektorů  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  je opět sečteme a dostaneme tak otočený původní vektor  $\vec{c}' = \vec{a}' + \vec{b}'$ . Souřadnice  $[x', y']$  konce otočené šipky pak dostaneme tak, že sečteme horizontální složky vektorů  $\vec{a}'$ ,  $\vec{b}'$  a pak jejich vertikální složky. Nakonec máme

$$\begin{aligned} x' &= \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ y' &= \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Tím dostáváme slavné součtové vzorce

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (7)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \quad (8)$$

*To je nějaké divné. Určitě jsme někde po cestě udělali chybu. Což takhle pro kontrolu ověřit výsledek pro  $\alpha = 60^\circ$  a  $\beta = 30^\circ$ ?*

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ) &= \cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ \sin(90^\circ) &= \cos 60^\circ \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{aligned}$$

Funguje to! <sup>6</sup>

*Dobře, máme součtové vzorce. Existuje ale jeden významný speciální případ. Jak lze s užitím součtových vzorců kompaktně vyjádřit  $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha)$ ? Tomu se řekne vzorec pro sinus dvojnásobného argumentu.*

Tupě dosadíme do součtového vzorce, prostě bety nahradíme alfami

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

<sup>6</sup>Jen upozorním, že počítačový program má však souřadnice koncového bodu šipky uložené jako dvojici  $[x, y]$ . Z předchozího postupu vyplývá, že souřadnice nového koncového bodu pak dostaneme jako

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \beta - y \sin \beta \\ y' &= x \sin \beta + y \cos \beta \end{aligned}$$

To je způsob, jakým program vypočítá otočení šipky.

A to se vyplatí pamatovat. Když si pamatujeme tento vztah, tak si snáze vzpomeneme, jak vypadají součtové vzorce. Ve vzorci pro sinus jsou součiny  $\sin$  krát  $\cos$  a znaménko  $+$ .

*Dříve jsme si odvodili vztah pro vzdálenost dopadu při šikmém vrhu/kopu*

$$\frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$$

*To je sice pěkné, ale je z toho vidět, pod jakým úhlem  $\alpha$  vzhledem k zemi musíme házet, abychom dohodili co nejdál? A do jaké vzdálenosti míč doletí, když ho hodíme pod tímto nejvýhodnějším úhlem?*

Vztah můžeme přepsat

$$d = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Nejdál dohodíme při takovém úhlu, kdy  $\sin(2\alpha)$  je maximální. V argumentu sinu musí proto být  $2\alpha = 90^\circ$  a tedy  $\alpha = 45^\circ$ ! Hodnota sinu je pak 1 a maximální délka hodu je

$$d_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

*Jak by vypadaly vzorce pro rozdíl úhlů  $\cos(\alpha - \beta)$  a  $\sin(\alpha - \beta)$ ?*

Všude výraz  $\beta$  nahradíme výrazem  $-\beta$ . Pak si uvědomíme, že kosinus je funkce sudá, tedy  $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$  a funkce sinus je lichá, tedy  $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$ . Odtud pak již snadno

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= -\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

*A uměl bys odvodit vzorec pro poloviční argument, tedy pro  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ?*

Víme, že

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Proto musí platit i

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Nyní  $\sin \frac{\alpha}{2}$  vyjádříme pomocí kosinu a upravujeme

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}) \\ \cos \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \\ \frac{1 + \cos \alpha}{2} &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{aligned}$$

Platnost vztahu je možné vidět i z obrázku 34.

*Nakonec pomocí součtových vzorců ověřte vztahy z kapitoly 6.1.*

### 6.3 Vzorce součet-součin

*Karle, zkoušel jsi někdy sečíst součtové vzorce? Cože? No, sečíst vzorce*

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \tag{9}$$

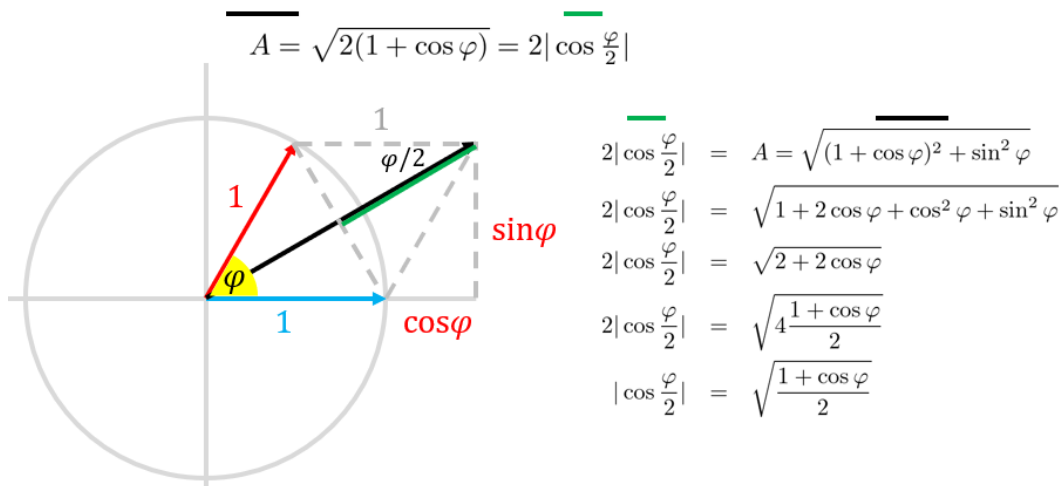
$$\sin(\alpha - \beta) = -\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \tag{10}$$

Sečteme-li tyto rovnice pod sebou, dostaneme

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

Tomu se někdy říká vzorec součet-součin. Vystupují tam čísla  $\alpha - \beta$  a  $\alpha + \beta$ . My bychom však spíše chtěli vztah pro součet  $\sin(x) + \sin(y)$  pro libovolná čísla  $x$  a  $y$ . Musíme si však uvědomit, že libovolná dvě čísla  $x$ ,  $y$  jde napsat ve výše uvedeném tvaru. Zkusme najít taková čísla  $\alpha$  a  $\beta$ , aby platilo

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta \\ y &= \alpha - \beta \end{aligned}$$



Obrázek 34: Vztah pro kosinus polovičního argumentu.

*Dokážete vyjádřit  $\alpha$  a  $\beta$  pomocí  $x$  a  $y$ ?*

Nejprve rovnice sečteme a dostaneme vyjádření  $\alpha$  pomocí  $x$  a  $y$ . Potom rovnice odečteme a dostaneme vyjádření  $\beta$ .

$$\alpha = \frac{x + y}{2}$$

$$\beta = \frac{x - y}{2}$$

Vzorec součet součin tedy lze psát ve tvaru

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

*Jak by vypadal vzorec, kdybychom chtěli součinem vyjádřit*

$$\sin(x) + \sin(x + \delta)?$$

Pouze dosadíme za  $y = x + \delta$  a dostaneme

$$\sin(x) + \sin(x + \delta) = 2 \sin\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Tento vzorec si podržíme v paměti, protože má zajímavé fyzikální konsekvence.

*Jako cvičení se pokuste odvodit, jak budou vypadat analogické vzorce pro*

$$\sin(x) - \sin(x + \delta) \quad \cos x + \cos y.$$

## 6.4 \*Prudkost kopce sinus podruhé

V předchozím jsme tvrdili, že pokud máme kopcovitý terén, tedy funkci  $y(x)$ , která vypadá jako funkce sinus, tak prudkost terénu v závislosti na souřadnici  $x$  můžeme vyjádřit jako funkci kosinus. Kreslili jsme si obrázky a vypadalo to rozumně, ale nepodali jsme důkaz.

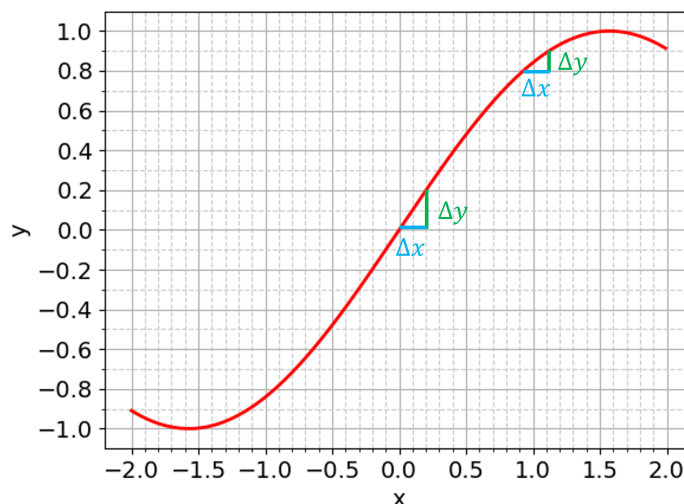
Prudkost měříme tak, že se posuneme ve směru osy  $x$  o malý kousíček  $\Delta x$  a sledujeme, o jak velký kousíček  $\Delta y$  se změní naše výška. Když je  $\Delta y$  velká oproti  $\Delta x$ , tak řekneme, že kopec je prudký, neboli prudkost definujeme výrazem  $\text{prudkost} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Když jdeme do kopce, tak je prudkost kladná a z kopce je záporná, protože  $\Delta y$  je záporné. Mějme funkci  $y = \sin(x)$ . Prudkost na libovolné souřadnici  $x$  pak lze vyjádřit

$$\text{prudkost}[\sin(x)] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta \sin(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \quad (11)$$

Zde výraz  $\sin(x + \Delta x)$  rozvineme pomocí součtového vzorce, kde  $\alpha \leftrightarrow x$ ,  $\beta \leftrightarrow \Delta x$

$$\sin(x + \Delta x) = \cos(x) \sin(\Delta x) + \sin(x) \cos(\Delta x)$$





Obrázek 35: Prudkost funkce pro dané  $x$ , neboli její derivaci v tomto bodě, definujeme jako podíl  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , přičemž  $\Delta x$  bereme co nejmenší.

Teď vezmeme v potaz, že  $\Delta x$  je jen co nejmenší posun, tedy je to číslo skoro nulové. Dříve jsme zavedli užitečné aproximace pro velmi malý argument:

$$\sin \Delta x \approx \Delta x \quad \cos(\Delta x) \approx \cos 0 = 1.$$

Potom

$$\sin(x + \Delta x) \approx \cos(x)\Delta x + \sin(x).$$

Toto zasuneme zpět do vztahu (11) pro prudkost

$$\text{prudkost}[\sin(x)] = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \approx \frac{\cos(x)\Delta x + \sin(x) - \sin(x)}{\Delta x} = \frac{\cos(x)\Delta x}{\Delta x} = \cos(x)$$

Skutečně jsme tak potvrdili předchozí tvrzení, že prudkost funkce sinus odpovídá funkci kosinus. Jak již bylo řečeno, zápis prudkost[ $f(x)$ ] se obvykle zkracuje na  $f'(x)$ .

*Co kdybychom stejný postup provedli pro funkci kosinus a chtěli bychom vědět, jakou funkcí lze vyjádřit její prudkost? Co by vyšlo?*

Obdobným postupem bychom dostali, že prudkost  $\cos x$  lze vyjádřit jako  $-\sin x$ . Všimněme si znaménka minus.

Máme zde zajímavé pozorování: Prudkost změny sinus je kosinus. Prudkost změny kosinu je -sinus. Prudkost změny prudkosti změny sinu je proto -sinus. Právě tato vlastnost dělá funkci sinus mimořádně zajímavou pro fyziku. Nastíníme proč: Časovou prudkost změny polohy nazýváme rychlost. Časová prudkost změny rychlosti je zrychlení. Zrychlení má ve fyzice mimořádný význam, protože vystupuje v Newtonově pohybovém zákonu. Prudkost změny označujeme jako derivaci. Jde tedy říci, že rychlost je časová derivace polohy a zrychlení je časová derivace rychlosti. Spojení 'Prudkost změny prudkosti změny' přeložíme jako 'druhá derivace' a tedy zrychlení je druhou časovou derivací polohy. Sinus je tedy funkce, jejíž druhá derivace je opět sinus, ale se záporným znaménkem. Jak se ukáže, existuje řada fyzikálních systémů, pro které platí, že zrychlení je úměrné záporné vzaté hodnotě polohy. V takovém případě se systém pohybuje tak, že se poloha mění v čase harmonicky jako funkce sinus.

## 6.5 Tabulka důležitých goniometrických vzorců

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (12)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (13)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \quad (14)$$

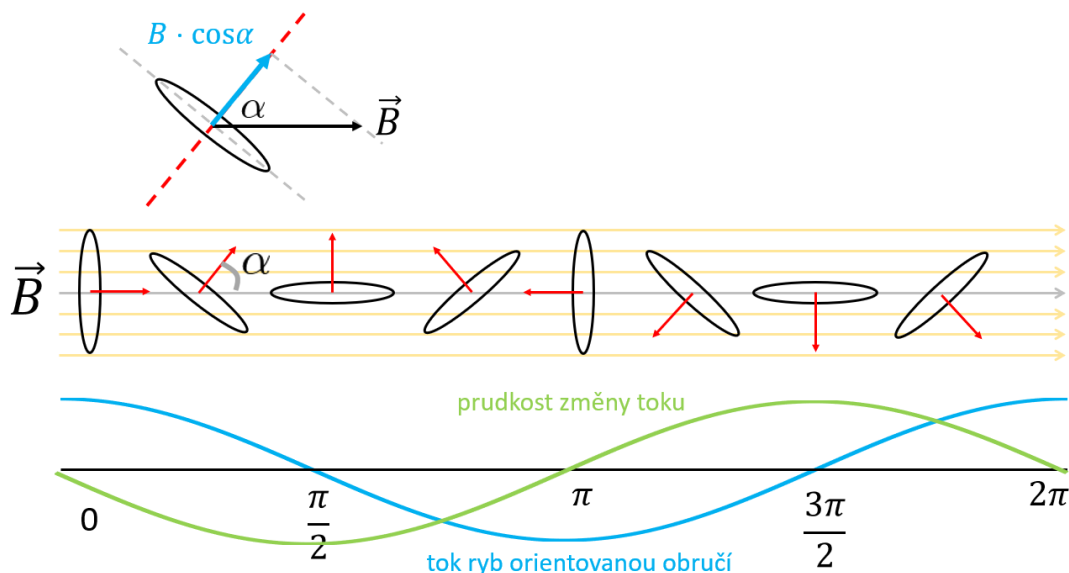
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (15)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (16)$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (17)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (18)$$

$$\sin(x) + \sin(x + \delta) = 2 \sin\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (19)$$



Obrázek 36: Elektromagnetická indukce

## 7 Fyzikální a jiné aplikace

### 7.1 Střídavý proud

#### 7.1.1 Elektromagnetická indukce

*Ukážu ti něco strašně zajímavého, je to skoro jako kouzelnický trik. Dora na stůl položila drátek mnohokrát namotaný na trubičku (neboli cívku), magnet, aparát na měření elektrického napětí neboli voltmetr a pár kablíků. Voltmetr připojila ke koncům cívky a významně se na Karla podívala. Pak vzala do ruky magnet, přiblížila ho k cívice a začala jím pomalu otáčet. V tom ručička voltmetru začala kmitat. Elektrické napětí nejdříve narůstalo, pak zase začalo klesat, kleslo pod nulu, pak se zase začalo růst a tak pořád dokola. Dora se podívala ještě významněji. Víš, co to je? Karel jen zavrtěl hlavou. Je to malá elektrárna na výrobu střídavého proudu. Chvilí tlačí elektrony jedním směrem, to pak ukazuje voltmetr kladné napětí a za chvíli potom zase tlačí elektrony druhým směrem a to pak vidíme záporné napětí. Kdybychom si nakreslili do grafu napětí, které ukazuje voltmetr v různých časech, tak bychom dostali sinusovku třeba jako na obrázku 36. Karel chvíli neřikal nic, ale pak vytušil, že se má zeptat – PROČ?*

Magnet, kterým Dora točila, má okolo sebe magnetické pole, které jde znázornit takzvanými indukčními čarami. Nebudeme nyní řešit, jak přesně vypadají indukční čáry v okolí tyčového magnetu. Budeme si představovat, že dostáváme rovnoběžné indukční čáry. Když Dora točila magnetem v okolí cívky, tak vytvářela točivé magnetické pole, tedy směr indukčních čar se otáčí. Stejně tak kdyby točila cívkou v nehybném magnetickém poli, tak se vůči cívice bude směr magnetického pole otáčet, a tyto situace jsou ekvivalentní.

Kdybychom si indukční čáry představili jako proud vody, tak cívkou proteče nejvíc vody, když indukční čáry míří ve směru osy cívky. Když budou indukční čáry nějak na šikmo k ose cívky, tak proteče méně vody. Když naopak indukční čáry míří kolmo na osu cívky, tak vnitřkem cívky nebude protékat žádná voda. S tímto jsme se setkali již při studiu toku rybiček obručí. Tento pomyslný průtok indukčních čar cívkou označujeme jako magnetický indukční tok a značíme  $\Phi$ . Magnetický indukční tok  $\Phi$  je tím větší, čím větší je plocha průřezu cívky, čím silnější je magnetické pole  $B$  a závisí také na tom, jak moc indukční čáry míří ve směru osy cívky. Uplatňovat se bude jen složka magnetického pole  $\vec{B}$  mířící ve směru osy cívky. Když osa cívky a vektor  $\vec{B}$  svírají úhel  $\alpha$ , tak průmět  $\vec{B}$  do směru osy je roven  $B \cos \alpha$ , jak je patrné v obrázku 36.

Z toho vyvodíme, že platí

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (20)$$

kde úhel  $\alpha$  mezi osou cívky a směrem indukčních čar se postupně v čase mění, jak se cívka a magnetické pole vůči sobě otáčejí. Úhel otočení můžeme vyjádřit jako  $\alpha = \omega t$ , kde  $\omega$  značí, o jak velký úhel v radiánech se cívka a magnetické pole vzájemně otočí za 1 s.

Jeden z největších experimentátorů všech dob, Michael Faraday, v 19. století objevil, že mezi konci cívky vzniká elektrické napětí  $U$  ve chvíli, kdy se mění magnetický indukční tok vnitřkem cívky, a že čím je v čase

změna toku  $\Phi$  prudší, tím je indukované napětí větší <sup>7</sup>

$$U = -\frac{d\Phi}{dt},$$

kde písmeno  $d$  je synonymum ke znaku  $\Delta$ , který obvykle značí změnu, přičemž zdůrazňuje, že změna času je vždy jen maličká.

Když v okolí cívky máme otáčivé magnetické pole, tak do posledního vztahu dosadíme za  $\Phi$  ze vztahu (20) a dostáváme

$$U = -\frac{d(BS \cos \alpha)}{dt} = -BS \frac{d(\cos \alpha)}{dt}$$

S postupnou změnou  $\alpha$  se tok  $\Phi$  mění podle funkce kosinus. Indukované napětí odpovídá prudkosti změny toku v čase. Nakreslíme si funkci kosinus a představíme si, že je to profil nějakého terénu, kopce, po kterém se postupně procházíme zleva doprava. Sledujeme, kdy je terén nejprudší a kdy nejméně prudký, tedy sledujeme, jak bude namáhavé daným místem procházet. To už jsme ale přeci dělali! Prudkost funkce kosinus vypadá jako funkce  $-\sin$ . Také jsme ukázali, že prudkost funkce  $y = R \cos \omega t$  lze vyjádřit jako  $y' = -R\omega \sin \omega t$ .

Když se vrátíme k cívice a magnetickému poli a shrneme vše dohromady, tak

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS \cos \alpha)}{dt} = -\frac{d(BS \cos(\omega t))}{dt} = BS\omega \sin \omega t$$

Není to nádherna? Indukované napětí se v čase mění jako hodnota křivky sinus – chvíli je kladné a chvíli záporné. Napětí je přímo úměrné velikosti magnetického pole  $B$ , ploše průřezu cívky  $S$  a úhlové rychlosti otáčení cívky  $\omega$ . A toto je základ téměř veškeré výroby elektřiny na Zemi v tepelných, jaderných, vodních i větrných elektrárnách – vedle velké cívky se velkou rychlostí otáčí silný magnet poháněný turbínou.<sup>8</sup> Střídavé napětí pak putuje do zásuvek v našich bytech, kde se jeho okamžitá hodnota v čase také mění jako funkce sinus.

V elektrárnách jsou okolo otáčejícího se magnetu rozmístěny tři cívky do hvězdice, kde každá cívka je pootočená o  $120^\circ$  oproti předchozí cívice. Každá cívka tak produkuje střídavé napětí popsané funkcí sinus, akorát napětí z jednotlivých cívek jsou vůči sobě fázově posunutá.

### 7.1.2 Napětí v zásuvce

*Víš Karle, jaké je napětí v zásuvce? No to náhodou vím – 220 V! Ale kdeže! Bejvávalo! Je to 230 V, vysmála se Karlovi Dora. Jenže je to přeci střídavé napětí, takže má každou chvíli jinou hodnotu. Tak 230 v je možná maximální hodnota? Není to maximální hodnota, ale takzvaná efektivní hodnota. Vysvětlím ti to...*

Napětí v zásuvce je střídavé, což znamená, že mezi levou a pravou zdířkou se napětí plynule mění z kladných hodnot do záporných a zase naopak, že v určité chvíli je napětí maximální a v určité chvíli zase nulové. Napětí je tedy v každý okamžik jiné. Údaj 230 V označuje takzvané efektivní napětí. Je to napětí, které by musel mít stejnosměrný proud, aby dodával stejný výkon, tedy např. abychom stejnosměrným proudem ohřáli vodu v konvici za stejnou dobu jako střídavým proudem. Výkon proudu je dán jako součin velikosti proudu topnou spirálou konvice a napětí mezi jejími konci. Velikost proudu je ale přímo úměrná velikosti napětí – čím větší napětí, tím větší teče proud. Pro okamžitý výkon střídavého proudu pak platí:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_{\max} \sin(\omega t) \cdot I_{\max} \sin(\omega t) = U_{\max} I_{\max} \sin^2(\omega t)$$

Graf funkce  $\sin^2(\omega t)$  je v obrázku 37. Je vidět, že její střední hodnota je  $\frac{1}{2}$ , protože obdélník o výšce jedna polovina bude mít stejný obsah jako je obsah plochy pod naší funkcí. Střední hodnota výkonu  $\bar{P}$  pak je

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} U_{\max}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_{\max}\right)$$

Z posledního výrazu je patrné, že pokud bychom měli stejnosměrné napětí a proud o velikostech

$$U_{\text{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{\max}, \quad I_{\text{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_{\max},$$

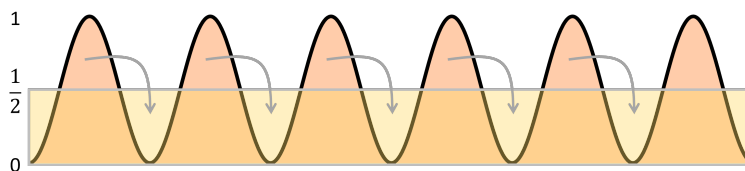
tak by výkon byl stejný jako v případě střídavého proudu. Vztah mezi efektivní a maximální hodnotou střídavého napětí je tedy

$$U_{\max} = \frac{2}{\sqrt{2}} U_{\text{ef}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 230 \text{ V} \approx 325 \text{ V}.$$

Napětí v zásuvce proto dosahuje maximální hodnoty 325 V.

<sup>7</sup>Nebudeme se zde zabývat tím, proč je ve vztahu ještě znaménko minus, čtenáře odkážeme na nastudování Lenzova zákona.

<sup>8</sup>Pouze fotovoltaické solární elektrárny využívají k výrobě elektrického proudu jiný princip.



Obrázek 37: Střední hodnota funkce  $\sin^2 x$ .

### 7.1.3 Fázové a sdružené napětí

*Byl hezký jarní den a Karel se nabídl, že u Dory za domem bude kydat hnůj. Podívej, něco ti ukázu. Víš, kolik zdírek má zásuvka? Zeptala se Dora. To vím, dvě zdírky s fázovým a neutrálním vodičem a jeden zemnicí kolík. Odpověděl sebevědomě Karel. Tak se podívej na tuhle zásuvku, a Dora odklopila víčko zásuvky na stěně chléva. . .*

Už jsme si řekli, že v běžné zásuvce doma je mezi fázovým vodičem (levá zdírka) a neutrálním vodičem (pravá zdírka) časově proměnné střídavé napětí, které jde popsat rovnicí

$$u(t) = 325 \sin(\omega t + \phi)$$

kde  $\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$

Kdo má domek, tak má možná někde u garáže zásuvku, která má 5 zdírek: zemnicí vodič, neutrální a tři fázové. Ta se dá použít na pohon silných spotřebičů. Do této zásuvky jsou do třech zdírek přivedeny všechny tři fáze. Napětí každé z těchto zdírek oproti neutrálnímu vodiči jde popsat výše uvedeným vztahem, akorát se každá zdírka liší ve fázovém posunu  $\phi$ . Fáze střídavého proudu jsou od sebe posunuté o  $120^\circ$ , což vyplývá z konstrukce AC generátoru, kde jsou cívky v kruhu posunuté o  $120^\circ$ . Fázové posuny jsou tedy postupně  $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ . Silný spotřebič je pak možné zapojit mezi dvě fázové zdírky. Říkáme pak, že využívá sdružené napětí. Napětí, které cítí spotřebič jde potom vyjádřit jako rozdíl napětí mezi těmito dvěma zdírkami, tedy

$$u(t) = 325[\sin(\omega t) - \sin(\omega t + \phi)]$$

kde  $\phi = 2\pi/3$ .

Jakou velikost má amplituda sdruženého napětí? Můžeme si pomoci obrázkem 38 s fázory, které znázorňují jednotlivé sinusovky. Výpočet rozdílu napětí se pak redukuje na zjištění délky strany pravoúhlého trojúhelníku.

Dokážeme grafický výsledek potvrdit čistě pomocí goniometrických vzorců? Můžeme využít vzorec součtů součinů (18) a dostaneme

$$\begin{aligned} u(t) &= 325[\sin(\omega t) - \sin(\omega t + \phi)] \\ &= 325[\sin(\omega t) + \sin(-\omega t - \phi)] \\ &= 325[2 \cos(\omega t + \phi/2) \sin(-\phi/2)] \\ &= 2 \cdot 325 \sin(-\pi/3) \cos(\omega t + \phi/2) \\ &= -2 \cdot 325 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \phi/2) \\ &= -325 \cdot \sqrt{3} \cos(\omega t + \phi/2) \end{aligned}$$

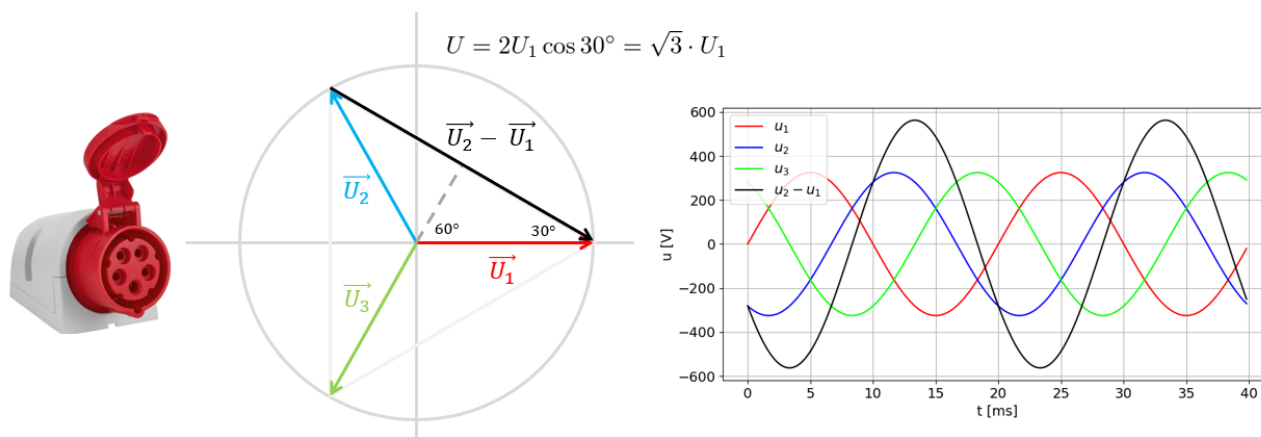
Amplituda sdruženého napětí je potom  $563 \text{ V}$ , tedy  $\sqrt{3}$  větší než fázového napětí. Efektivní hodnota sdruženého napětí je opět  $\sqrt{2}$ × menší, než jeho amplituda, přičemž  $563/\sqrt{2} = 398$ . Často se proto říká, že se pak spotřebič zapojuje na napětí  $400 \text{ V}$ , namísto obvyklých  $230 \text{ V}$ . Napětí je prostě větší faktorem  $\sqrt{3}$ .

## 7.2 Vlnění

### 7.2.1 Rovnice postupné vlny

Když na vodní hladině kmitáme míčem, tak se od míče šíří vlna. Budeme nyní předpokládat, že tvar vlny je sinusovka, i když to není úplně pravda. Míčem kmitáme nahoru a dolů, přičemž jeho výchylka v čase oproti střední poloze je popsána rovnicí

$$y_{mic}(t) = A \sin(2\pi \frac{t}{T}).$$



Obrázek 38: Sdružené napětí – napětí mezi dvěma fázovými vodiči. (obrázek zásuvky z webu obi.cz)

Řekněme, že perioda kmitání míče je 1 s. Již víme, že této periodě odpovídá frekvence  $f = 1 \text{ s}^{-1}$  a úhlová rychlost  $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ . Vlna se po hladině šíří rychlostí  $v$ , řekněme  $v = 2 \text{ m/s}$ . Když uděláme fotku vlny, tak uvidíme, že vršky vln jsou od sebe ve vzdálenosti  $\lambda$ . Této vzdálenosti dvou vršek postupné vlny se říká *vlnová délka*. Vzdálenost dvou vršek je vzdálenost, kterou vlna urazí za jednu periodu kmitání míče, tedy

$$\lambda = vT.$$

Ve vzdálenosti  $x = 5 \text{ m}$  od kmitajícího míče je žalud, který se také houpe na hladině a mění se tak jeho vertikální výchylka, kterou označíme  $y$ . Než k žaludu dospěje vršek vlny vytvořený míčem, trvá to dobu  $\Delta t = x/v$ , v našem případě tedy  $\Delta t = 2,5 \text{ s}$ . Budeme nyní předpokládat, že vlna neslábne (což vlastně není pravda). Potom žalud bude kmitat se stejnou amplitudou jako míč, ale bude jakoby cítit kmitání míče s časovým zpožděním tak, jak míč kmital před časem  $\Delta t = 2,5 \text{ s}$ . Toto časové zpoždění zahrneme do rovnice pro popis časové výchylky žaludu

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t - \Delta t}{T}\right)$$

Časové zpoždění ale závisí na vzdálenosti  $x$  žaludu a rychlosti postupu vlny  $v$ . Za časové zpoždění dosadíme  $x/v$  a vzápětí si vzpomeneme, že  $\lambda = vT$ , a tedy

$$y(x, t) = A \sin\left(2\pi \frac{t - x/v}{T}\right)$$

$$y(x, t) = A \sin\left(2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]\right)$$

Všimneme si, že už se jedná o závislost na dvou proměnných, čas  $t$  a vzdálenost  $x$ . Této rovnici se říká *rovnice postupného vlnění*. V poslední rovnici vidíme v argumentu sinu dva výrazy, přičemž perioda v prvním časovém výrazu hraje formálně stejnou roli jako vlnová délka v prostorovém výrazu. Šlo by říci, že vlnová délka je jakousi *prostorovou periodou*. Pro naši konkrétní polohu žaludu  $x = 5 \text{ m}$  máme

$$y(t) = A \sin(2\pi t - 5\pi).$$

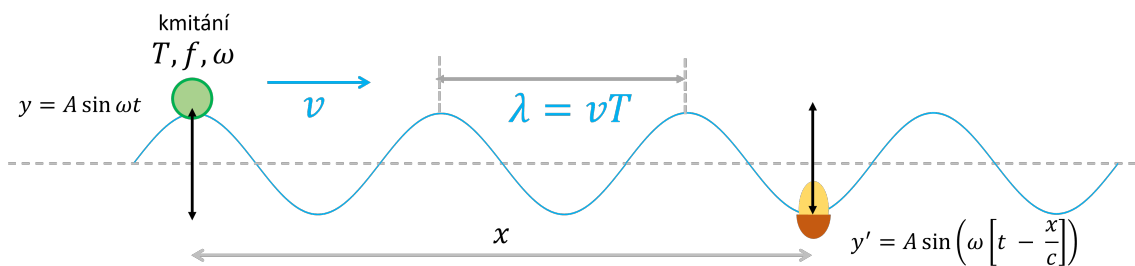
Fázový posun žaludu oproti míči je  $5\pi$ . Co to znamená? Úhel  $5\pi$  je ekvivalentní úhlu  $\pi$ , tedy  $180^\circ$ . My však z kapitoly 6.1 víme, že  $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$ . Když je míč nahoře, tak je žalud dole a naopak. Žalud oproti míči kmitá takzvaně v *protifázi*.

Rovnice postupné vlny ale půjde napsat i s použitím úhlové frekvence  $\omega$  namísto periody  $t$ . Uvědomíme si, že  $\omega = 2\pi/T$ . V analogii k tomu si můžeme zavést i nový výraz pro prostorovou frekvenci  $k = 2\pi/\lambda$ . Tomuto číslu se někdy říká vlnčet nebo vlnové číslo. Rovnici postupné vlny pak jde psát kompaktně ve tvaru

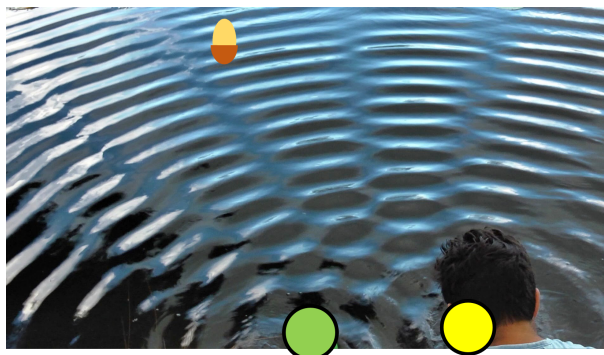
$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx). \quad (21)$$

## 7.2.2 Sčítání vlnění stejné frekvence s fázovým posunem

*Dora a Karel se šli koupat k rybníku. Dora se však ani nesvlékla, jen si vyhrnula nohavice, vzala si dva gumové míče a už se sápla do vody. V každé ruce držela jeden míč a začala jimi na hladině kmitat nahoru*



Obrázek 39: Postupná vlna



Obrázek 40: Dva synchronně kmitající míče na vodní hladině a kmitající žalud opodál. Pozadí obrázku bylo získáno z videa kanálu Veritasium <https://www.youtube.com/watch?v=Iuv6hY6zsd0>

*a dolů. Od míčů se šířily vlny. Vlny na hladině vytvářely zajímavý pravidelný vzor. Podívej na ty žaludy! Vidíš? Jeden se na hladině houpe nahoru a dolů, ale támhle ten se nehoupe, jenom stojí, přestože k němu přicházejí vlny od obou míčů! Není to nádherna? Je, vzmoohl se Karel.*

Dora v každé ruce drží balon a synchronně s balóny kmitá na vodní hladině (obrázek 40). Od každého balonu se šíří vlna. V určitém místě na vodní hladině je žalud. K žaludu doputuje vlna od prvního i od druhého míče. K druhému míči to ale může být jinak daleko než k prvnímu míči, takže vlny k žaludu už nedospějí ve fázi, nýbrž je mezi nimi fázový posun  $\delta$ . Pro fázový posun platí  $\delta = 2\pi(L_2 - L_1)/\lambda$ , kde  $\Delta L_{1,2}$  značí vzdálenost od žaludu k prvnímu resp. druhému míči.

Může se dokonce stát, že od prvního míče k žaludu dorazí vršek vlny a zároveň od druhého míče k němu dorazí dolík. Vlny od obou zdrojů se tak v daném místě budou neustále rušit a žalud pak vlastně bude na klidné hladině – vůbec nebude kmitat nahoru a dolů, amplituda kmitání bude nulová. Jinde je naopak místo, kam vždy vlny z obou zdrojů dorazí ve fázi, tedy vršky zároveň a pak dolíky zároveň. Takové místo hladiny bude kmitat hodně nahoru a dolů – amplituda kmitání bude dvojnásobná. Nepřekvapí nás, že v prvním případě rušení vln musí jejich fázový rozdíl být roven lichému počtu  $\pi$ , tedy  $\delta = (2k + 1)\pi$ , zatímco v druhém případě je to sudý počet  $\delta = 2k\pi$ . Pokud bude fázový rozdíl jiný než jsou násobky  $\pi$ , tak amplituda kmitání daného místa bude někde mezi těmito extrémy. Jedná se vlastně o sčítání dvou sinusovek, které jsou vzájemně posunuté, jak znázorňuje obrázek 41.

Kmitání žaludu na hladině lze vyjádřit jako součet dvou sinusovek ve formě

$$y(t) = A \sin(\omega t) + A \sin(\omega t + \delta)$$

Podle užitečného vzorce součet-součin

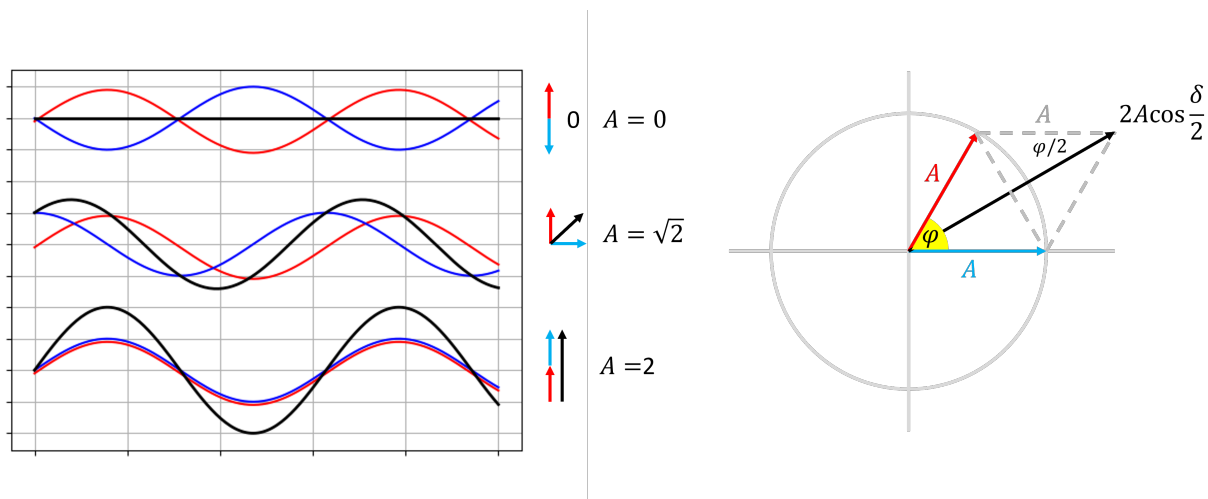
$$\sin(x) + \sin(x + \delta) = 2 \sin\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

dostáváme pro kmitání žaludu

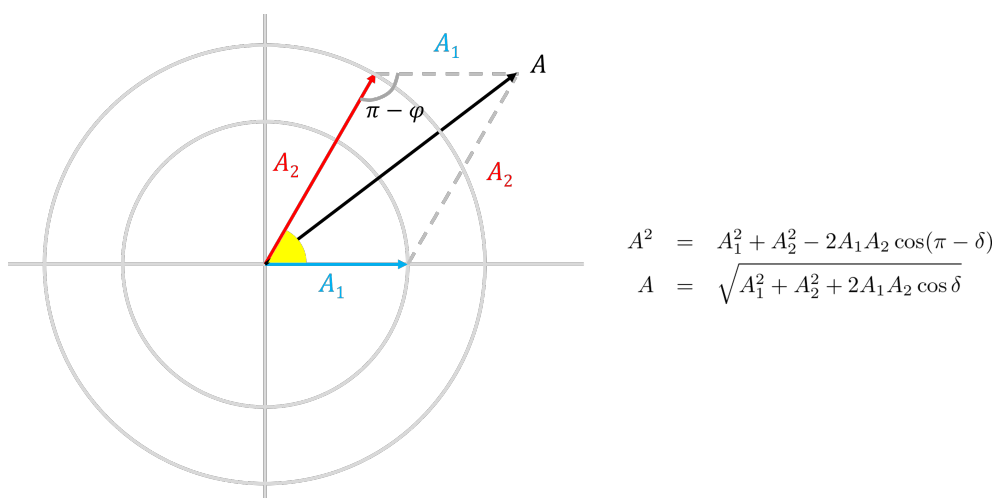
$$\begin{aligned} y(t) &= \sin(\omega t) + \sin(\omega t + \delta) = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ y(t) &= 2 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

Amplituda kmitání žaludu je ta část výrazu, která není závislá na čase, tedy

$$A = 2 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$



Obrázek 41: Sčítání sinusovek s fázovým rozdílem a různými amplitudami.



Obrázek 42: Sčítání sinusovek s fázovým rozdílem.

Dosazením  $\delta = 0$  a  $\delta = \pi$  si rychle ověříme, že získaná výsledná amplituda odpovídá původnímu rozboru situace. Takový výsledek ale vidíme i napravo v obrázku 41, kde jsme obě sinusovky reprezentovali fázorem. Výsledná amplituda odpovídá délce výsledného fázoru. Různá místa na vodní hladině tak kmitají s různou amplitudou v závislosti na tom, s jakým fázovým rozdílem  $\delta$  do místa dospějí vlny z různých zdrojů.

Pokud by vás zajímalo, jak by se sčítaly sinusovky s nestejnými amplitudami, tak je to znázorněno v obrázku 42, kde je opět využito zobrazení pomocí fázorů. V takovém případě už doplněný rovnoběžník není kosočtverec a úhlopříčka proto nepůlí úhel a nejde pak využít vztah pro kosinus polovičního úhlu. Ve výpočtu se využívá kosinová věta, kterou se však budete učit později.

### 7.2.3 Stojaté vlnění

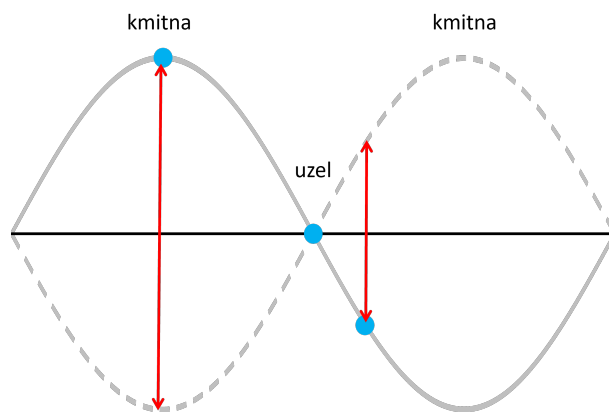
*Dora vyskládala do mikrovlnky vedle sebe toustové chleby a zapnula ji. Po chvíli začal vycházet hustý dým a velký smrad. Troubu otevřela, vyvalil se kouř a vydala toustové chleby. A hle, byly spálené jen na určitých místech, byly tam zuhelnatělé puntíky ve vzdálenosti 6 cm od sebe. Vidíš, mikrovlnka neohřívá rovnoměrně. Uvnitř vzniká totiž stojatá vlna, takže elektromagnetické pole někde kmitá hodně, tam se chleba spálil, a někde zase vůbec, chlubila se Dora svým vjtvorem.*

Generátor elektromagnetického vlnění v troubě vysílá vlnu, řekněme směrem doprava, která se však od protější stěny odráží. Původní vlna mířící doprava se skládá s odraženou vlnou mířící doleva. Odražená vlna se pohybuje prostorem opačným směrem. Původní a odraženou vlnu je proto možné popsat rovnicemi postupného vlnění

$$y_1(t, x) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2(t, x) = A \sin(\omega t + kx)$$





Obrázek 43: Kmitny a uzly na stojaté vlně

kde  $k = 2\pi/\lambda$  je dříve zavedené vlnové číslo.

Výsledná vlna potom

$$y(t, x) = y_1(t, x) + y_2(t, x) = A[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)]$$

To je však výraz ve tvaru

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

kde  $\alpha = \omega t$  a  $\beta = kx$ . Proto

$$\begin{aligned} y(t, x) = y_1(t, x) + y_2(t, x) &= A[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)] \\ &= 2A \sin(\omega t) \cos(kx) \\ &= 2A \sin(\omega t) \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Pokud se podíváme do nějakého konkrétního místa  $x$ , tak zde v čase dochází ke kmitání s úhlovou frekvencí  $\omega$ , jak je popsáno členem  $\sin(\omega t)$ . Amplituda kmitání v tomto místě je určena výrazem

$$|2A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)|.$$

*Pro která  $x$  nabývá tato amplituda kmitání maximální hodnoty?*

Je to pro taková  $x$ , kdy  $|\cos(kx)| = 1$ , to jest pokud

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi,$$

kde  $n$  je nějaké celé číslo. A tedy

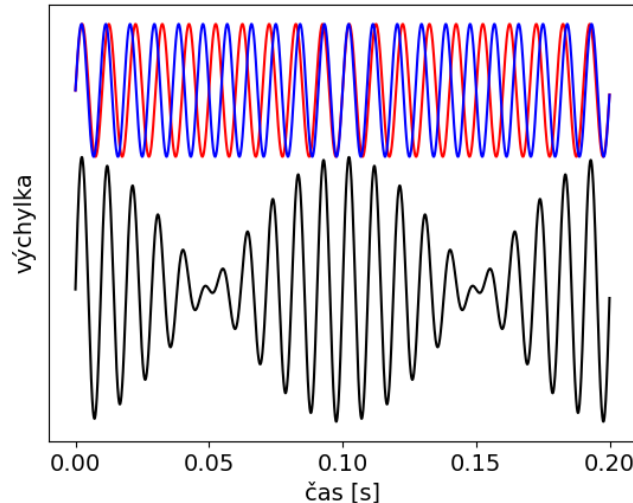
$$x = n\lambda/2.$$

Takovým místům řekneme kmitny a jejich vzájemná vzdálenost je  $\lambda/2$ .

Existují naopak nějaká místa, kde je amplituda kmitání nulová, kde vlastně ke kmitání nedochází? Ano, je to v místech, kde  $\cos(kx) = 0$ , což platí pro  $x = (n + \frac{1}{2})\lambda/2$ , kde  $n$  je libovolné celé číslo. Takovým místům s nulovou amplitudou řekneme uzly a jejich vzájemná vzdálenost je opět  $\lambda/2$ . Situaci znázorňuje obrázek 43.

Generátor mikrovlnné trouby produkuje elektromagnetické vlnění na frekvenci  $f = 2,45$  GHz. Při rychlosti světla  $c = 3 \times 10^8$  m/s to odpovídá vlnové délce  $\lambda = c/f \approx 12$  cm. Vzdálenost míst s vysokou intenzitou ohřevu je proto polovina vlnové délky, tedy 6 cm.

Stojaté vlnění má ve fyzice obrovský význam. Stojaté vlnění vzniká na strunách hudebních nástrojů a umožňuje jim vydávat příjemný zvuk. V dechových nástrojích zase vzniká stojaté zvukové vlnění v trubicích a dutinách. V neposlední řadě toho využívají lidské hlasivky, které rozkmitávají vzduch v dýchací trubici. Tím to však nekončí. Elektronů v atomech a molekulách lze připodobnit ke stojatému vlnění. Existují totiž místa v atomech, kde se elektron nemůže nacházet – to jsou uzly stojatého vlnění, a naopak místa, kde elektron nalezneme s největší pravděpodobností, což jsou kmitny elektronové vlny.



Obrázek 44: Vznik rázů (černá křivka) sčítáním kmitání o dvou blízkých frekvencích 100 Hz a 110 Hz (červená a modrá křivka).

## 7.2.4 Rázy

*Chceš si poslechnout něco příjemného? zeptala se záhadně Dora. Ano? vyloudil ze sebe podezřívavě Karel. Dora si na mobilu našla webovou stránku s online tónovým generátorem<sup>9</sup> a pustila tón komorního a, tedy  $f_1 = 440$  Hz. Nic zvláštního. Potom ale otevřela druhou záložku a nastavila tón  $f_2 = 441$  Hz. Významně se podívala a spustila i druhý tón. A co se nedělo! Z mobilu se začalo ozývat takové kolísavé houkání. To je, co? houkala nadšeně Dora. To teda! odvětil Karel s neurčitým výrazem.*

*Jak je to možné? A co kdybychom zkusili smíchat tón frekvence 440 Hz a 442 Hz - v čem by se situace změnila? Proč to tak je?*

Zkusíme odpovědět matematikou. Do ucha dorazí zvukové vlnění o dvou různých frekvencích. Zvukové vlny se sčítají a v místě bubínku vytvářejí časově proměnný tlak vzduchu se složitějším průběhem, než je jednoduchá sinusovka. Nejprve si ale obyčejné frekvence převedeme na úhlové frekvence:  $\omega_1 = 2\pi f = 880\pi$  rad/s  $\omega_2 = 2\pi f = 882\pi$  rad/s a rozdíl je  $\delta = 2\pi$  rad/s. Sčítají se kmitání, která lze vyjádřit jako  $y_1(t) = \sin(\omega t)$  a  $y_2(t) = \sin([\omega + \delta]t)$ . Ze vzorce součet-součin ale dostáváme

$$\sin(\omega t) + \sin(\omega t + \delta t) = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}t\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}t\right)$$

Člen  $\sin(\omega t + \frac{\delta}{2}t)$  popisuje rychlé kmitání bubínku na frekvenci  $881\pi$  rad/s = 440,5 Hz, což způsobuje, že zase slyšíme nějaký tón. Člen  $\cos(\frac{\delta}{2}t)$  má daleko nižší frekvenci, pouhých  $\pi$  rad/s = 0,5 Hz, což představuje kolísání intenzity s periodou 2 sekundy, které nás zajímalo v první řadě. Hlasitější zvuk ale slyšíme 1x za sekundu, protože z obrázku 44 vidíme, že zvuk bude nejhlasitější, když je cos v maximum nebo v minimum.

Když změníme druhý tón na 442 Hz, tak  $\delta = 4\pi$  a člen  $\cos(\frac{\delta}{2}t)$  bude mít dvojnásobnou frekvenci, tedy 1 Hz, a zhlásití pak nastane 2x za sekundu. Vidíme tedy, že čím jsou vstupní frekvence vzdálenější, tím je kolísání rychlejší a čím jsou blíže, tím je kolísání pomalejší. Vyzkoušejte si na vlastní uši, že matematika funguje!

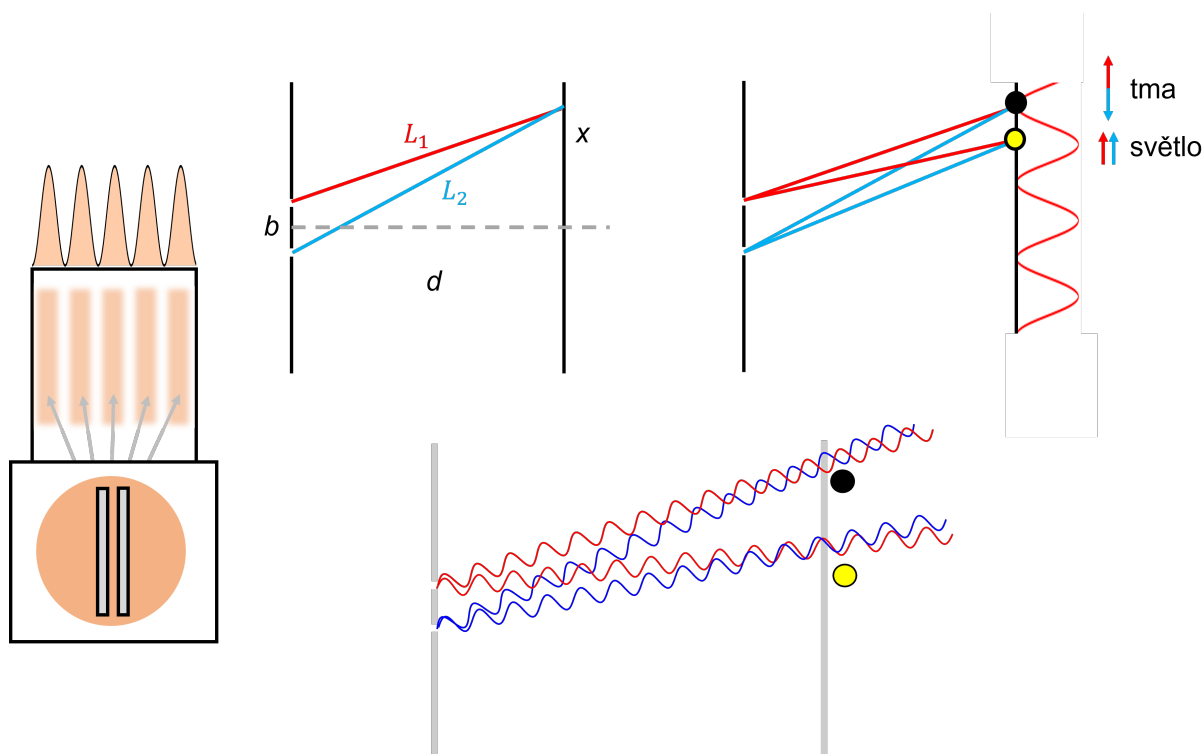
## 7.2.5 \*Interference na dvojtěrbině

*Máš oči jako dvě štěrbiný! posmíval se Karel, když ve dveřích viděl Doru s opuchlýma očima nejspíš po dlouhém ponocování. No jo no, podařilo se mi ale zopakovat dvojtěrbinový experiment! pravila Dora vítězoslavně.*

Jedná se o historicky mimořádně významný experiment. Mějme dvě maličké tenoučké rovnoběžné štěrbiný ve vzdálenosti  $b$  od sebe (obrázek 45). Ve větší vzdálenosti za štěrbinými je bílá destička, často označovaná jako stínítko. Na tyto štěrbiný svítíme koherentním světlem – to může být v moderní době laserový paprsek a v dřívější době sluneční světlo, které předtím prošlo malinkým otvorem.

větlo je vlnění o úhlové frekvenci  $\omega$ . Za dvěma štěrbinými bychom očekávali dvě světelné stopy. Avšak světelný obrazec na stínítku je mnohem zajímavější: vidíme mnoho světlých proužků a mezi nimi tmavá

<sup>9</sup><https://onlinetonegenerator.com/>



Obrázek 45: Interference na dvojštěrbíně

místa. Tento experiment byl nezvratným důkazem, že světlo se chová jako vlnění. Každá štěrbinka se chová jako samostatný zdroj světelné vlny. Tyto štěrbinky jsou jako zdroje vlnění ve fázi – kmitají synchronně. Do daného místa na stínítku dorazí vlny z jednoho i druhého otvoru a tyto vlny se sečtou. V některých místech přicházejí tak, že vždy společně přijdou jejich vršky nebo jejich dolíky. Tam se vlny vzájemně posilují a místo je pak světlé. Jinde společně dorazí vršek z jednoho zdroje a dolík z druhého zdroje. Tam se vzájemně vyruší a v daném místě je tma.

Nakresleme si situaci. Štěrbiny jsou ve vzdálenosti  $b$  od sebe, přičemž polovinu této vzdálenosti označím  $a = b/2$ . Ve vzdálenosti  $d$  od štěrbin je stínítko. Vzdálenost štěrbin  $b$  musí být maličká, řádově mikrometry, zatímco vzdálenost je stínítku  $d$  je proti tomu mnohem větší, typicky desítky cm. Budeme tedy mít na paměti, že  $a \ll d$ , neboli  $a/d \ll 1$ . Postupně se posouváme po stínítku – měníme souřadnici  $y$  a zjišťujeme, jak se v daném místě sečtou vlny ze dvou různých zdrojů. Velikost  $x$  se pohybuje řádově v milimetrech až centimetrech. Nejdříve vyjádříme vzdálenosti daného místa od obou štěrbin

$$l_1 = \sqrt{(x-a)^2 + d^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(x+a)^2 + d^2}$$

Vytkneme  $d$

$$l_1 = d\sqrt{\frac{(x-a)^2}{d^2} + 1} = d\sqrt{\frac{x^2 - 2ax + a^2}{d^2} + 1}$$

$$l_2 = d\sqrt{\frac{(x+a)^2}{d^2} + 1} = d\sqrt{\frac{x^2 + 2ax + a^2}{d^2} + 1}$$

Pokud bude  $x^2 \ll d^2$ , tedy pokud stínítko bude relativně malé oproti vzdálenosti stínítka od štěrbin, tak výraz  $(x^2 - 2ax + a^2)/d^2$  je výrazně menší než 1. Díky tomu můžeme použít užitečnou aproximaci  $\sqrt{1+p} \approx 1 + \frac{p}{2}$  a zbavit se tak odmocniny

$$l_1 \approx d\left(\frac{x^2 - 2ax + a^2}{2d^2} + 1\right)$$

$$l_2 \approx d\left(\frac{x^2 + 2ax + a^2}{2d^2} + 1\right)$$

Nyní vyjádříme rozdíl vzdáleností  $\Delta l$

$$\Delta l = l_2 - l_1 \approx \frac{2ax}{d} = \frac{bx}{d}$$

Dráhovému rozdílu  $\Delta l$  odpovídá časový rozdíl

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{c} = \frac{bx}{dc},$$

kde  $c$  je rychlost šíření světla.

Do daného místa  $x$  tak dopadají dvě vlnění a sčítají se. Výchylku vlnění lze popsat funkcí

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin(\omega t) + \sin(\omega[t - \Delta t]) \\ y(t) &= \sin(\omega t) + \sin\left(\omega t - \omega \frac{bx}{dc}\right) \end{aligned}$$

Jedná se tedy o součet sinusovek o stejné frekvenci, ale s fázovým posunem  $\omega\Delta t$ . Výraz na pravé straně je však ve formě

$$\sin(x) + \sin(x - \delta) = 2 \sin\left(x - \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Proto součet sinusovek můžeme napsat jako součin

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin(\omega t) + \sin\left(\omega t - \omega \frac{bx}{dc}\right) \\ y(t) &= 2 \sin\left(\omega \left[t - \frac{\Delta t}{2}\right]\right) \cos\left(\omega \frac{bx}{2dc}\right) \end{aligned}$$

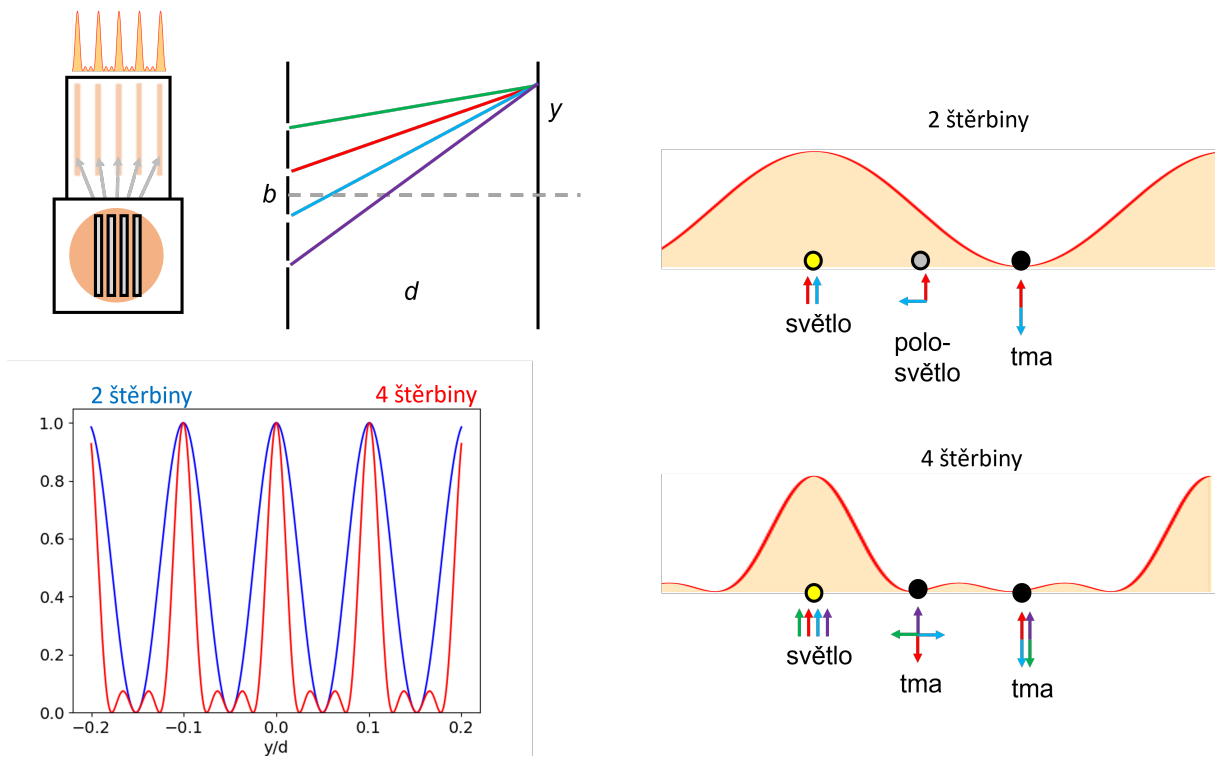
Sinusový člen je ve všech místech  $x$  stejný a vyjadřuje prostě časově proměnnou výchylku (elektrického pole). Kosinusový člen však závisí na  $x$  a naopak nezávisí na čase. Ovlivňuje tedy amplitudu vlnění v daném místě. Intenzita světla  $I$  v daném místě je úměrná druhé mocnině amplitudy vlnění. Uvážíme-li ještě, že  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , dostaneme

$$I(x) \propto \cos^2\left(\frac{\omega b}{2dc} x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} x\right).$$

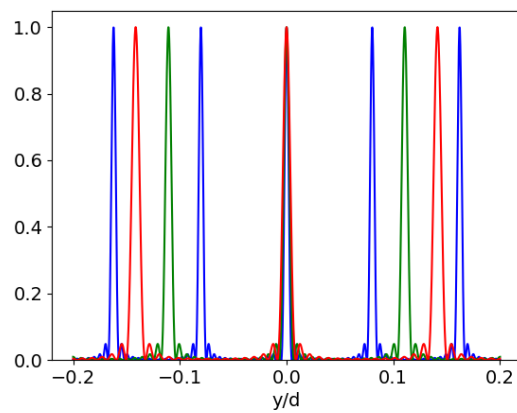
Dostáváme tak průběh intenzity osvětlení v závislosti na poloze  $x$  na stínítku. Prozkoumejme trochu tuto závislost. Čím je větší frekvence světla  $\omega$ , tedy např. když změním barvu z červené na modrou, tím k sobě budou maxima funkce  $I(x)$  blíže – proužky budou hustěji u sebe. Podobně pokud budeme zvětšovat vzdálenost štěrbin, tak se také proužky budou přibližovat k sobě. Naopak zmenšení vzdálenosti štěrbin vede k oddálení proužků, takže proužky jsou od sebe snáze rozlišitelné. Pokud bychom na štěrbinu posvítily bílým světlem, které obsahuje červenou, zelenou i modrou, tak každé barvě budou odpovídat proužky trochu v jiné vzdálenosti a výsledný obrazec na stínítku bude jakoby duhový. Dostáváme tedy způsob, jak rozložit bílé světlo do duhy, do spektra, na základě interference světla z více zdrojů. Akorát tento způsob ještě musíme trochu vylepšit.

Co kdyby v destičce nebyly štěrbinové dvě, nýbrž čtyři – k původním dvěma by z každé strany přibyla ještě jedna štěrbinová? V daném místě na stínítku se pak budou sčítat čtyři sinusovky ze čtyř zdrojů, jak znázorňuje obrázek 46. Každou sinusovku je možné reprezentovat jejím fázorem. Vidíme, že v místě, kde předtím bylo polosvětlo, protože se sečetly dvě sinusovky s fázovým rozdílem  $90^\circ$ , tak nyní je úplná tma, protože se sčítají sinusovky s fázovými posuny  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  a  $270^\circ$  a zjevně se fázory sčítají na nulu. Ve výsledku jsou proužky na stínítku užší než předtím. Když přidáme další a další štěrbinové, tak se proužky budou dále zužovat až budou velmi úzké. Při osvětlení štěrbin bílým světlem se tak proužky jednotlivých barev už nebudou překrývat, nýbrž budou krásně oddělené (situace pro případ šestnácti štěrbin je na obrázku 47). Tento mechanismus umožňuje rozkládat světlo do spektra s velkou citlivostí a umožňuje tak třeba přesnou chemickou analýzu různých sloučenin a nebo třeba analýzu složení hvězd. V praxi bývá štěrbin vedle sebe stovky až tisíce, ve vzájemné vzdálenosti řádově mikrometry.

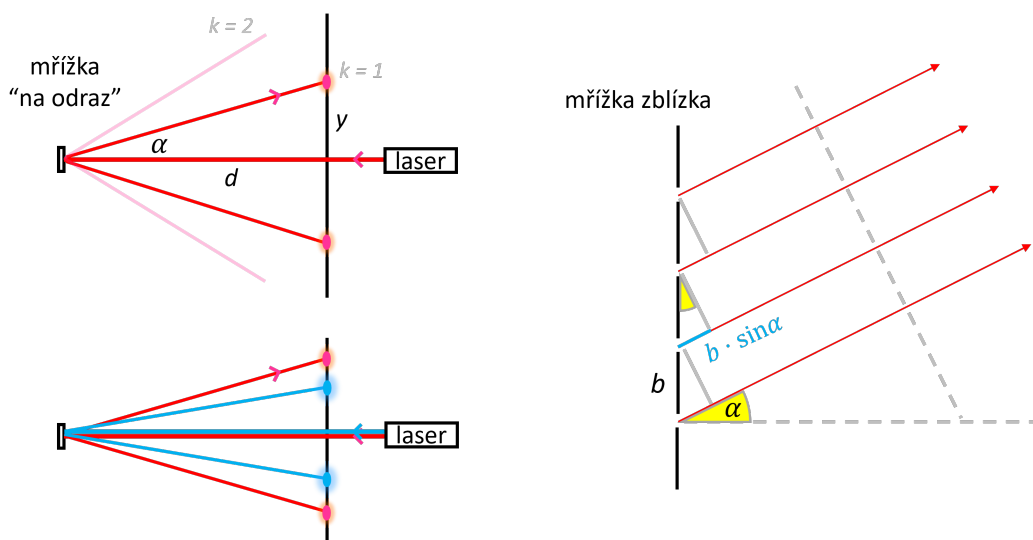
Proč byl dvojšťěrbinový experiment přelomový? Jednoznačně dokázal, že světlo má vlnovou povahu. Později se ukázalo, že světlo jde nahlížet jednak jako vlnu, jednak jako proud částic – fotonů. Tomu se říká vlnově částicový dualismus. Když foton může mít vlnovou povahu, proč by i jakákoli jiná částice (proton, elektron, atom), nemohla mít vlnovou povahu? Tato úvaha je základem kvantové mechaniky, přelomové teorie díky které chápeme chování částic na úrovni atomů a molekul.



Obrázek 46: Interference světla na čtyřech štěrbinách



Obrázek 47: Rozklad bílého světla na 16 štěrbinách



Obrázek 48: Interference na odrazové mřížce, např. na povrchu CD.

## 7.2.6 Difrakční mřížka

*Dora držela v jedné ruce cédéčko, v druhé ruce laserové ukazovátko a stoupla si jeden metr před stěnu. A teď sleduj! Laserem zasvítila proti cédéčku. Laserový paprsek se odrazil a na stěně byla vidět stopa, jenže stopa nebyla jedna, nýbrž jich bylo několik na různých místech!*

Jaktože se laserový svazek rozdělí a vidíme světlo vycházet v různých směrech? CD má na povrchu pravidelnou strukturu vrypů, mezi kterými je určitá malá vzdálenost  $b$ . Při dopadu světla na vryp se tento chová jako zdroj světla, který světlo vysílá všemi směry. Vrypy jsou v určité pravidelné malé vzdálenosti  $b$  od sebe a povrch CD se tak chová jako difrakční mřížka popsaná v minulém odstavci. V určitém místě na stěně se skládá vlnění vydávané všemi osvětlenými vrypy, kterých je mnoho. Jen v některých konkrétních místech dojde ke konstruktivní interferenci, kdy vršky vln ze všech zdrojů dorazí do daného místa na stěně současně. Ke každému vrypu je to od daného místa na stěně trochu jinak daleko. Pokud ale vzdálenost ke každému dalšímu vrypu bude o jednu vlnovou délku  $\lambda$  větší než k tomu předchozímu, tak se na stěně skutečně vždy současně sejdou vršky vln. Velikost oblasti CD osvětlené laserem je maličká, řádově mm, což určuje efektivní velikost naší mřížky. Vzdálenost ke stěně je 1 metr, tedy nesrovnatelně větší, a vzdálenost  $y$  je asi 40 cm. Vzhledem k tomu, že  $d$  a  $y$  jsou mnohem větší než efektivní rozměr mřížky, tak úhel  $\alpha$  je prakticky totožný pro všechny vrypy a vzdálenost od stopy na stěně k jednotlivým vrypům se pak liší o

$$\Delta l = b \sin \alpha$$

Jak bylo řečeno, podmínkou konstruktivní interference je, aby se do rozdílu vzdáleností vešel celý počet vlnových délek  $\lambda$

$$\Delta l = b \sin \alpha = k \lambda \quad (22)$$

kde  $k$  je nějaké přirozené číslo (obvykle nás však zajímá zejména  $k = 1$  nebo  $k = 2$ ).

Jaká je vzdálenost  $b$  jednotlivých vrypů na CD? Vyjádříme z předchozího

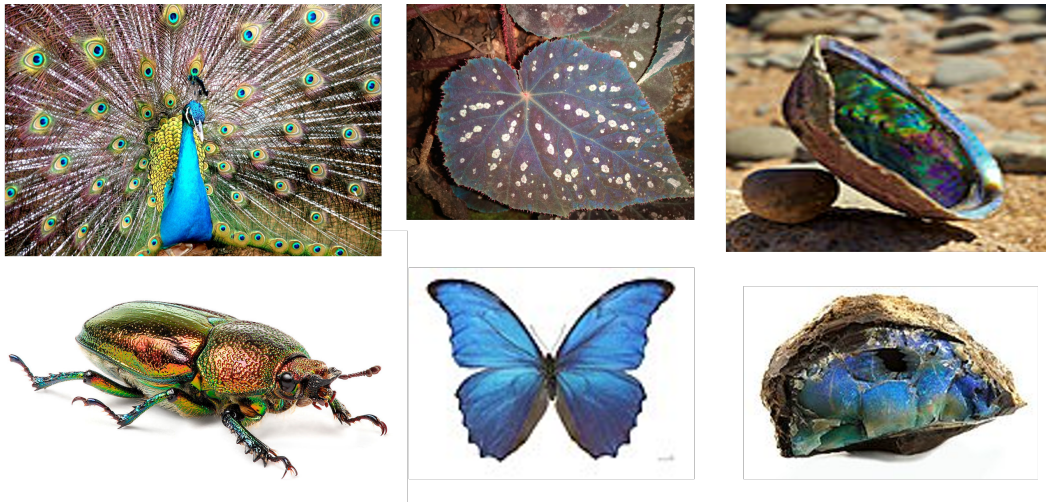
$$b = \frac{k \lambda}{\sin \alpha} = k \lambda \cdot \frac{\sqrt{d^2 + y^2}}{y}$$

Vlnová délka červeného laserového ukazovátko je  $\lambda = 650 \text{ nm} = 0,65 \times 10^{-6} \text{ m}$ . Zajímá nás takzvané první interferenční maximum, tedy  $k = 1$ . Jak bylo uvedeno,  $y = 1 \text{ m}$ ,  $d = 0,4 \text{ m}$ . Dosazením dostaneme

$$b = 0,65 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \frac{\sqrt{1,16}}{0,4} \approx 1,7 \times 10^{-6} \text{ m} = 1,7 \mu\text{m}$$

CD má tedy na povrchu pravidelnou strukturu vrypů s rozestupy asi 1,7 mikrometrů. To je také důvod, proč hraje duhovými barvami – chová se jako difrakční mřížka a jako taková je schopna rozkládat bílé světlo do barev. Schopnost rozkládat do barev vidíme i ze vztahu 22. Když je dán rozestup vrypů  $b$ , tak různým barvám, tedy různým  $\lambda$ , budou odpovídat různé úhly  $\alpha$ , pod kterými bude vycházet konstruktivní interference

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{k \lambda}{b}.$$



Obrázek 49: Iridescence, neboli vznik duhových efektů a barev na pravidelných mikrostrukturách. Koláž fotografií z <https://en.wikipedia.org/wiki/Iridescence>, licence Creative Commons.

Když bude vlnová délka menší, tedy např. modrá namísto červené, tak bude  $\alpha$  také menší.

Je také patrné, že když se na mřížku osvětlenou bílým světlem budeme dívat pod různými úhly  $\alpha$ , tak se v daném směru bude posilovat nějaká konkrétní vlnová délka podle vztahu  $\lambda = b \sin \alpha$ . Když se podíváme pod menším úhlem, tak se pozorovaná barva změní třeba ze zelené na modrou. Duhové efekty vznikají nejlépe právě když vzdálenost vrypů je řádově v mikrometrech. Již bylo řečeno, že difrakční mřížky se využívají hojně zejména v analytické technice. Tohoto principu rozkladu do duhy ale od nepaměti využívá i příroda: křídla motýlů, krovky brouků, ptačí pera, duhové zbarvení perlorodek, krásné odlesky opálů ... Ve všech případech se jedná o takzvané strukturální barvy, kdy se dané místo nejeví barevné kvůli tomu, že by obsahovalo nějaký pigment, který určité barvy pohlcuje a jiné odráží, nýbrž proto, že povrch má pravidelnou mikrometrickou strukturu – vroubky, lamely, vrstvičky. Tento jev se také nazývá iridescence (obrázek 49).

## 7.3 Mechanické oscilátory

### 7.3.1 Harmonický oscilátor

*Dora měla zamýšlenou náladu. Kdyby fyzika měl mít svého boha, tak by to asi byl harmonický oscilátor, přemítala. Oscilace mají ve fyzice mimořádný význam a to i na úrovni atomů a molekul, kde dochází k neustálému kmitání atomů v molekulách a přelévání elektronové hustoty z jedné strany atomu na druhou. Harmonická oscilace je ta nejhezčí a nejčistší oscilace, kde výchylka jde popsat právě funkcí sinus či kosinus. Nejjednodušším a nejprůhlednějším příkladem harmonického oscilátoru je kmitající závaží na pružině. A to si teď rozebereme.*

Pružina je charakterizována svou tuhostí, značíme  $k$ . Důležitou vlastností ideální pružiny je to, že její prodloužení roste přímo úměrně síle, která pružinu natahuje. Přímou úměru mezi velikostí síly a natažením lze vyjádřit vztahem

$$F = k\Delta L,$$

kde  $k$  je právě tuhost pružiny a  $\Delta L$  je prodloužení pružiny. Tuhost vyjadřuje, jakou silou bychom teoreticky museli působit, abychom pružinu natáhli o jeden metr. Takže může třeba být  $k = 100 \text{ N/m}$ . Většina pružin by se asi přetrhla, kdybychom je tolik chtěli natáhnout. Nicméně tuhost můžeme určit i z menšího natažení, prostě působíme nějakou silou, třeba  $F = 10 \text{ N}$  a změříme, že se tím pružina prodlouží třeba o  $\Delta L = 0,1 \text{ m}$ . Potom  $k = F/\Delta L = 100 \text{ N/m}$ .

Na pružinu zavěsíme závaží hmotnosti  $m$  (obrázek 50). Tím se pružina trochu natáhne a dostane se do rovnovážné polohy, kdy síla od pružiny směrem nahoru vyrovnává tíhu závaží mířící dolů. Tato rovnovážná poloha pro nás bude výchozí. Když se závaží bude nacházet nad ní, tak budeme hovořit o kladné výchylce  $y$ , když pod ní, tak bude mít výchylka záporné znaménko.

Když pružinu trošičku natáhneme a pustíme, tak závaží na pružině začne kmitat: nejdříve bude zrychlovat směrem nahoru, pak projde rovnovážnou polohou a začne zpomalovat až postupně zastaví v momentě, kdy je pružina nejvíce stlačená. Potom začne zrychlovat směrem dolů a takhle pořád dokola.

Celková síla na závaží v poloze  $y$  jde vyjádřit jako

$$F = -ky.$$

Znaménko minus vyjadřuje, že když je pružina natažená směrem dolů, tedy výchylka z rovnovážné polohy je směrem dolů, tak síla působí opačným směrem, nahoru.

Druhý Newtonův zákon spojuje sílu na závaží a jeho zrychlení vztahem  $F = ma$ . Můžeme proto psát  $ma = -ky$ , potažmo

$$a = -\frac{k}{m}y.$$

Skvěle. Výchylka  $y$  se v průběhu času mění a spolu s ní i zrychlení, které závaží zažívá. Výraz  $\frac{k}{m}$  je ale pořád konstantní, protože je určen vlastnostmi závaží a pružiny.

Vzpomeneme si však, co platí při pohybu bodu po kružnici: Y-ová souřadnice při pohybu po kružnici je popsána rovnicí

$$y = R \sin(\omega t).$$

a y-ová složka dostředivého zrychlení je

$$a_y = -\omega^2 y,$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost otáčení. Tento vztah je ale podezřele stejný jako pro pružinu: zrychlení je přímo úměrné souřadnici a má opačný směr! Konstanta úměrnosti pro pohyb po kružnici je  $C = \omega^2$ , zatímco v případě pružiny máme  $C = \frac{k}{m}$ . Polohu závaží na pružině tedy půjde popsat funkcí, která bude mít také tvar

$$y = A \sin(\omega t).$$

Úhlová frekvence pohybu je v případě kružnice odmocninou z konstanty úměrnosti a stejně tak tomu musí být i pro pružinu

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ve finále tedy pro výchylku závaží na pružině platí <sup>10</sup>

$$y(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right).$$

Z našeho předchozího studia prudkosti funkce sinus v kapitole 5.6 jsme schopni napsat i předpis pro okamžitou rychlost a zrychlení závaží na pružině.

$$\begin{aligned} y &= A \sin \omega t \\ v = y' &= A\omega \cos \omega t \\ a = y'' &= -A\omega^2 \sin \omega t = -A\omega^2 y \end{aligned}$$

Maximální hodnoty rychlosti a zrychlení jsou pak patrně  $A\omega$  a  $A\omega^2$ .

*Jako cvičení se zamyslete nad následujícím: Dora na dlouhou pružinu zavěsila půlkilové závaží a pružina se tím protáhla o 6 cm. Potom pružinu se závažím natáhla o dalších 10 cm a pustila. a) Jaký je předpis pro výchylku  $y(t)$ ? Za jak dlouho po vypuštění bude rychlost závaží maximální? Jaké bude maximální zrychlení závaží? Pokud na závaží bude sedět beruška, udělá se jí špatně?*

### 7.3.2 Kyvadlo

*Karle, zdá se mi, že máš nějakou skrytou černotu v duši a ráda bych ji z tebe teď vymítla hypnózou. Souhlasíš? Mám na vybranou? zeptal se schlíple Karel. Hypnóza bude provedena pomocí matematického kyvadla, načež z kapsy vytáhla malou železnou kuličku pověšenou na tenký rybářský vlasce a počala s ní kmitat ze strany na stranu. Bez mrkání sleduj kuličku a přemýšlej proč...*

Analýza pohybu kyvadla na základě rozboru sil je poněkud ošemetná a i v některých učebnicích je prováděna chybně. Budeme se zabývat takzvaným matematickým kyvadlem, kde veškerá hmotnost je soustředěna v bodě (malé kuličce) na konci kyvadla a kde závěs má zanedbatelnou hmotnost. Poloha kyvadla je určena úhlem otočení ze svislé polohy  $\varphi$ . Kyvadlo nechť má závěs délky  $l$  a hmotnost kuličky  $m$ .

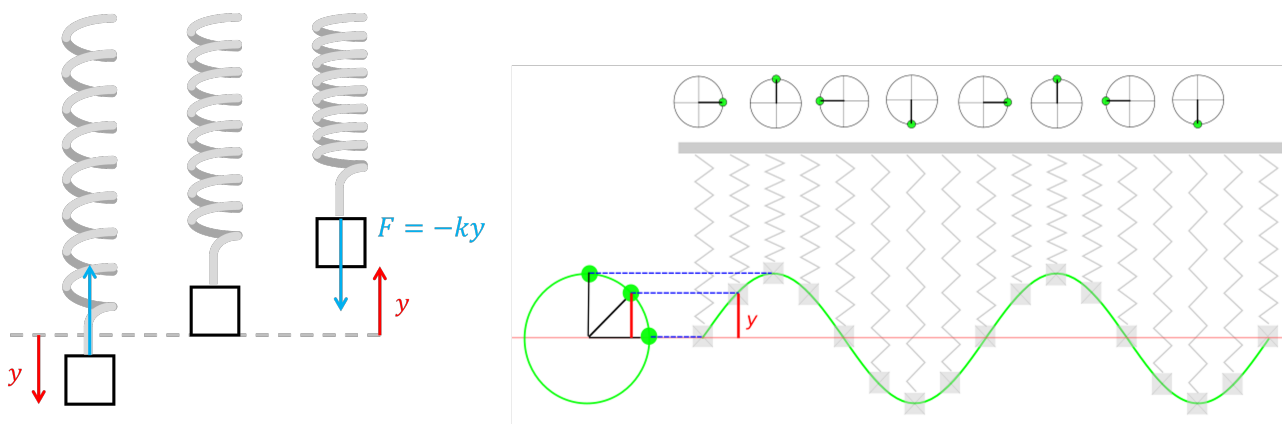
Kulička se pohybuje po části kružnice. Polohu na kružnici můžeme popsat hodnotou  $s = l\varphi$ , která vyjadřuje vzdálenost po oblouku k počátku soustavy souřadné, který jsme položili do nejnižšího bodu pohybu kyvadla. Síla působící na kuličku je součtem gravitační síly  $mg$  a tahové síly od lanka  $F_l$ .

<sup>10</sup>Situace s pružinou by šla nahlédnout i více matematicky. Víme, že zrychlení je druhou časovou derivací polohy, tedy platí

$$a = y'' = -\frac{k}{m}y.$$

Chceme najít předpis pro funkci  $y(t)$ , aby splňovala tento vztah. Ale my už víme, která funkce tuto vlastnost splňuje! Je to sinus, protože jsme dříve ukázali, že  $\sin(bx)' = b \cos(bx)$  a  $\cos(bx)' = -b \sin(bx)$ , a proto  $\sin(bx)'' = -b^2 \sin(bx)$ . V našem případě  $b^2 = k/m$  a dostáváme stejný výsledek jako na základě srovnání s kruhovým pohybem.





Obrázek 50: Harmonický oscilátor – závaží na pružině

Gravitační sílu lze rozložit na dvě složky, jednu ve směru trajektorie (tečnou), druhou kolmo na trajektorii. Nárůst rychlosti podél trajektorie způsobuje jen tečná složka, jejíž velikost je  $F = mg \sin \varphi$ . Tahová síla míří neustále přesně kolmo na trajektorii, takže nezpůsobuje změnu velikosti rychlosti. Tahovou sílu je možné sečíst s opačně mířící kolmou složkou gravitační síly. Výsledná síla míří ve směru lanka a hraje roli dostředivé síly, tedy způsobuje změnu směru rychlosti – zakřívování trajektorie.

Pokud je úhel  $\varphi$  malý, tak lze využít aproximace

$$F = mg \sin \varphi \approx mg\varphi$$

Pro úhel  $\varphi$  však platí  $\varphi = \frac{s}{l}$  a tedy

$$F \approx mg \frac{s}{l}$$

Podle druhého Newtonova zákona je

$$ma = F.$$

Podobně jako v případě pružiny i zde je směr síly opačný oproti směru výchylky, což zohledním přidáním minusu před sílu. Pokud využijeme aproximace pro malé úhly a zbavíme se tak funkce sinus, můžeme psát pohybovou rovnici

$$\begin{aligned} ma &= -mg \frac{s}{l} \\ a &= s'' = -\frac{g}{l}s \end{aligned}$$

Hledáme takovou funkci  $s(t)$ , aby splňovala tuto rovnici. To je však formálně stejná rovnice jako pro pružinu! Zrychlení, neboli druhá derivace výchylky  $s$ , je rovna minus konstanta krát tato výchylka. V případě pružiny tou konstantou byl výraz  $\frac{k}{m}$ , v případě kyvadla je to  $\frac{g}{l}$ . Stejně rovnice mají stejné řešení, takže lze uzavřít, že úhlová výchylka kyvadla v závislosti na čase lze pro malé úhly přibližně popsat funkcí

$$s(t) \approx s_{\max} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi_0 \right)$$

kde tomuto kmitavému pohybu lze přisoudit úhlovou frekvenci  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  a periodu kmitání

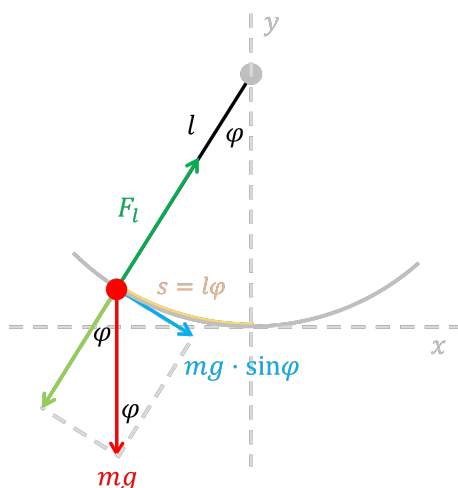
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zde si musíme uvědomit, že získaný výraz  $\omega$  NENÍ úhlová rychlost pohybu kuličky  $\Delta\varphi/\Delta t$ , kterážto se v průběhu pohybu mění. Je to parametr kmitání daný periodou kmitání.

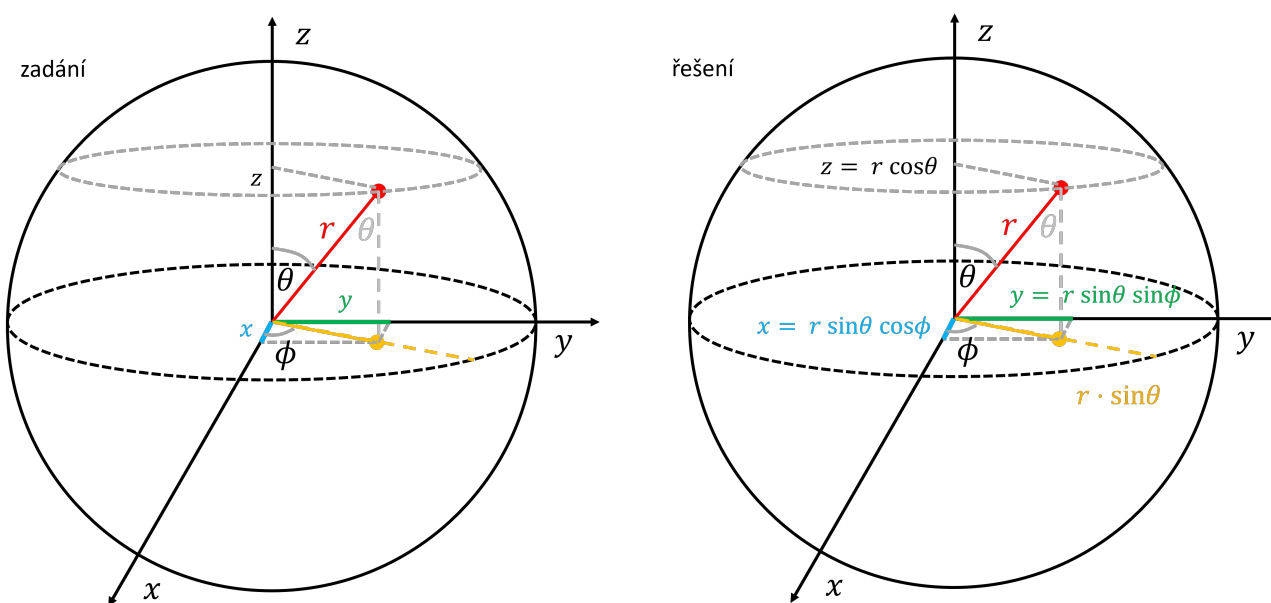
Když si vezmeme vlákno dlouhé 25 cm, tak vyjde perioda skoro přesně 1 s. Když budete s sebou nosit čtvrtmetrový provázek, nemusíte nosit hodinky.<sup>11</sup>

*Jsou věci, které by si každý měl aspoň jednou za život zkusit. Vytvořte si matematické kyvadlo a zkuste na základě měření jeho periody určit velikost gravitačního zrychlení!*

<sup>11</sup>Všimněme si ale ještě jedné zajímavé věci. Vidíme, že doba kmitu kyvadla nezávisí na hmotnosti kuličky a nezávisí ani na tom, zda ho na začátku rozkmitáme více či méně (pokud ho v obou případech rozkmitáme jen do malého úhlu). Fakt, že kyvadlo kmitá stejně rychle s lehkou i těžkou kuličkou, je velice zajímavý. Je to dáno tím, že se nám ve vztahu vykrátily hmotnosti. Na tom se nezdá být nic zajímavého, ale musíme si uvědomit, že  $m$  na levé straně vyjadřovalo hmotnost ve smyslu lenosti vůči urychlování, zatímco hmotnost  $m$  na pravé straně vyjadřovala sílu gravitace. To jsou přeci dvě úplně odlišné věci! To, že tyto dvě hmotnosti jsou ekvivalentní, není vůbec samozřejmé. Je to důležitým východiskem Einsteinovy obecné teorie relativity a hovoří se o takzvaném principu ekvivalence.



Obrázek 51: Matematické kyvadlo



Obrázek 52: Sférické souřadnice

## 7.4 Další aplikace

### 7.4.1 Sférické souřadnice

Víme, že polohu v rovině můžeme popsat buď kartézskými souřadnicemi jako dvojicí čísel  $[x, y]$ , nebo pomocí polárních souřadnic pomocí úhlu  $\varphi$  (azimutu) a vzdálenosti od počátku  $r$ . To jsme probrali v kapitole 5.2.

Polohu místa na Zemi však popisujeme ještě jiným způsobem, a sice pomocí zeměpisné šířky a délky. Oba tyto údaje se však uvádí ve stupních, např. souřadnice hory Říp jsou  $50.3867^\circ$  N,  $14.2895^\circ$  E. Ve skutečnosti tedy polohu místa na Zemi popisujeme pomocí dvou úhlů, zeměpisné šířky, tedy úhel od rovníku, a zeměpisné délky, tedy úhel od nultého poledníku (který z definice prochází hvězdárnou v Greenwich).

Ve fyzice se zavádějí podobným způsobem takzvané sférické souřadnice, kdy polohu bodu určujeme pomocí vzdálenosti od počátku a pomocí dvou úhlů. Na rozdíl od Země se však rovnoběžkový úhel měří nikoli od rovníku, ale od pólu, jak je znázorněno v obrázku 52.

*Situaci vidíte na obrázku. Dokážete ze znalosti těchto úhlů určit kartézské souřadnice v prostoru vzhledem ke středu Země?*

Poloměr zeměkoule označme  $R$ . Z obrázku je patrné, že výška místa nad rovinou rovníku je  $z = R \cos \theta$ . Poloměr rovnoběžky, na které dané místo leží, je zřejmě  $r = R \sin \theta$ . Když se na kouli podíváme zvrchu tak, vidíme, že souřadnice  $x, y$  vyvodíme z rovnoběžkové kružnice, na které bod leží. Platí  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

Když dosadíme za  $r = R \cos \theta$  tak ve finále máme

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \phi \\y &= R \sin \theta \sin \phi \\z &= R \cos \theta\end{aligned}$$

Tyto přechody mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi jsou velmi užitečné ve fyzice, počítačové grafice i pro navigaci pomocí GPS.

## 7.4.2 \*p-orbital

*Karle, pochopil jsi v chemii jak to bylo s tím p-orbitalem a co je to vůbec ten orbital? Orbital je oblast nejpravděpodobnějšího výskytu elektronu v okolí atomového jádra, pochlubil se Karel svými znalostmi. A rozumíš tomu, co to znamená? Nikolivěk.*

Na střední škole se studenti seznamují s pojmem atomový orbital v předmětu chemie i fyzika. Bývá trochu vágně definován jako oblast nejpravděpodobnějšího výskytu elektronu v atomu. Tyto oblasti (orbitaly) mohou nabývat různých tvarů a velikostí. Elektronu v různých orbitalech také přísluší různá energie. Přesně lze získat tvar orbitalů jen pro ten nejjednodušší atom – pro vodík s jedním elektronem. V základním stavu se elektron nachází v orbitalu 1s. Ten je sféricky symetrický a ve škole bývá reprezentován koulí. Pokud je elektronu nějakým způsobem dodána energie, tak může elektron přeskocit do orbitalu s vyšší energií, např. do orbitalu 2p. Ten už není sféricky symetrický a jeho tvar je zajímavější. Tvar 2p orbitalu má velký význam pro chemii. Biologicky nejzajímavější prvky uhlík, dusík a kyslík mají několik valenčních elektronů právě ve 2p orbitalech a specifický nesférický tvar těchto orbitalů umožňuje vznik vícenásobných vazeb a určuje tvar a vlastnosti vznikajících organických molekul.

2p orbital bývá na tabuli a v učebnicích často reprezentován zjednodušeně (53 vlevo). Uvedený model je však jen velice schematický a neodpovídá úplně realitě. Co to vůbec je orbital a jaký je skutečný tvar p-orbitalu?

Slovo orbital je podobné slovu orbita, pod kterým si představíme třeba kružnicovou trajektorii oběhu planety kolem Slunce. Původně si fyzici skutečně představovali, že elektrony obíhají jádro podobně jako planety obíhají Slunce, a že každému elektronu tedy lze přisoudit nějakou orbitu – trajektorii. Postupem času ale kvantová fyzika ukázala, že elektron v atomu nemá žádnou konkrétní trajektorii a že navíc ani nelze elektronu přisoudit žádnou konkrétní polohu. Lze jen říci, že se elektron v nějakých polohách bude vyskytovat s větší pravděpodobností než v jiných polohách. Elektrony v atomech jsou spíše popisovány jako stojaté vlny (podobně jako jsme ukázali, že foton nejde popisovat jako kuličku, nýbrž že má vlnové vlastnosti). Zkusme tedy elektron popsat jako vlnu. Jelikož jádro má tvar kuličky, tak je výhodné popisovat elektrony v okolí jádra pomocí sférických souřadnic. Každému místu prostoru v okolí jádra atomu přisoudíme velikost výchylky této vlny v daném místě. Tuto výchylku v závislosti na poloze budeme značit  $\Psi$ . Velikost výchylky je funkcí souřadnic a říkáme pak, že  $\Psi$  je vlnová funkce. Funkce  $\Psi$  může nabývat i záporných hodnot, jako každá výchylka vlny. Kvadrát hodnoty  $\Psi$  je však vždy kladné číslo. Ukazuje se, že pravděpodobnost výskytu elektronu v daném místě odpovídá právě kvadrátu vlnové funkce:  $\rho = |\Psi|^2$ . Vlnová funkce elektronu ve  $2p_z$  orbitalu se vyjadřuje ve sférických souřadnicích

$$\Psi(r, \theta, \phi) = C r e^{-r/2} \cos \theta.$$

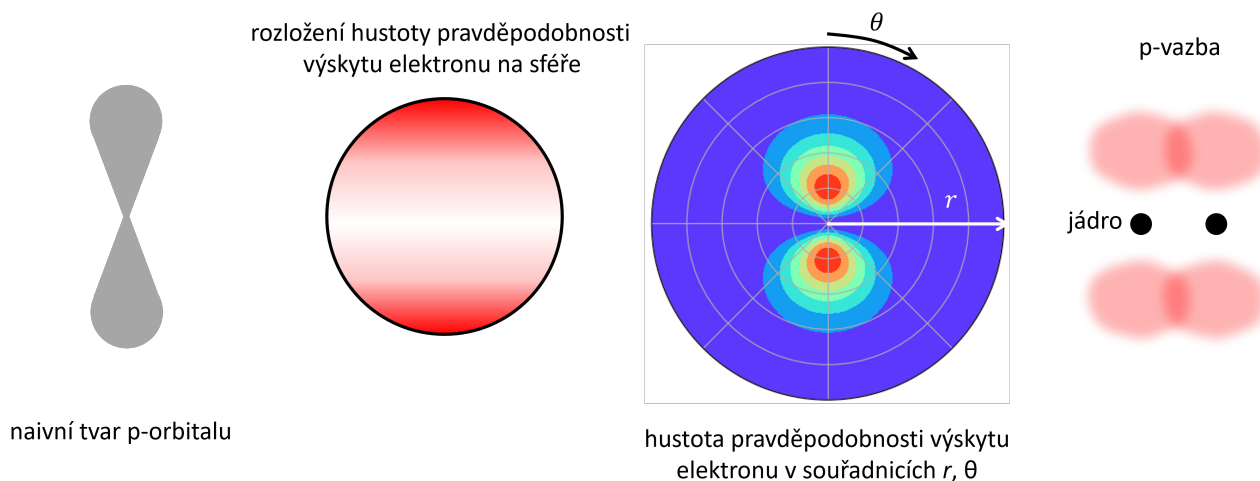
kde  $C$  určitá konstanta, kterou se zabývat nebudeme.

Představme si atom jako zeměkouli. Nejvyšší hodnota  $\Psi$  je pro  $\theta = 0$ , to jest když se nacházíme na severním pólu. Když jdeme z pólu směrem k rovníku, tak se  $\cos \theta$  zmenšuje až na rovníku dosáhne nulové hodnoty. Jdeme-li dál na jih, tak se hodnota začne propadat do záporných čísel. Pokud bychom byli třeba na severním pólu a začali se prokopávat dovnitř do Země, tak hodnota  $\Psi$  postupně poroste, až v určité vzdálenosti od středu Země dosáhne svého maxima. Když budeme kopat dál ke středu Země, tak hodnota  $\Psi$  bude klesat a ve středu Země dosáhne nulové hodnoty. Vidíme, že funkce  $\Psi$  vůbec neobsahuje závislost na úhlu  $\phi$ . To znamená, že když budeme v Praze a začneme se pohybovat po rovníku třeba směrem na východ, tak se po cestě  $\Psi$  vůbec nebude měnit.

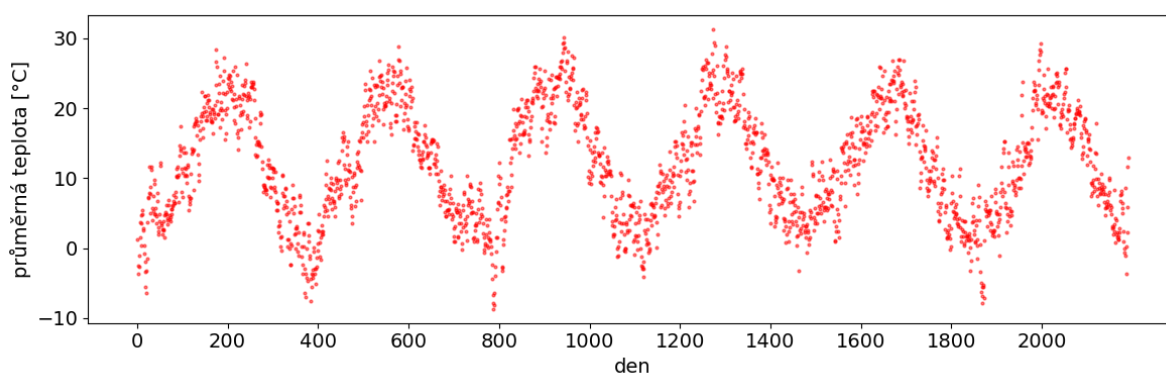
Jak si můžeme všimnout, tak hodnota výchylky  $\Psi$  nabývá kladných i záporných hodnot. Pravděpodobnost výskytu elektronu je však dána druhou mocninou,  $\rho = |\Psi|^2$ , a v daném místě je potom

$$\rho = |\Psi|^2 = C r^2 e^{-r} \cos^2 \theta$$

Situaci můžeme znázornit na sféře. Největší pravděpodobnost výskytu elektronu na sféře je v oblasti pólů, zatímco na rovníku elektron určitě nebude, protože  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Směrem do středu Země se opět  $\rho$  nejdříve postupně zvětšuje a od určité chvíle zase zmenšuje. Hodnota  $\rho$  závisí na  $r$  i  $\theta$ . Rozřízneme Zemi tak, že rovina řezu obsahuje oba póly i střed Země a podívejme se, jak vypadá hodnota  $\rho$  uvnitř (obrázek 53).



Obrázek 53: p-orbital



Obrázek 54: Průměrné denní teploty v Klementině v období od 1.1.2016 do 31.12.2021.

Plochu, kterou budeme znázorňovat tvar orbitalu, pak můžeme definovat třeba jako plochu (množinu bodů), kde všechny body mají stejnou hodnotu hustoty pravděpodobnosti výskytu  $\rho$  ("ekvihustotní plocha"). Tato plocha pro nás představuje okraj/hranici orbitalu. V obrázku je hezky vidět, jak vypadá množina bodů se stejnou hodnotou  $\rho$ . Jsou to takové baňaté přesýpací hodiny. Tvar je o dost baňatější, než jak se obvykle znázorňuje. Zajímavé je, že v oblasti rovníku a ve středu atomu je pravděpodobnost výskytu elektronu nulová. Chování elektronu atomu jsme přirovnávali ke stojaté vlně. Ve středu atomu jakoby se nacházel uzel tohoto stojatého vlnění. Z tvaru p-orbitalu tak vyplývá charakter p-vazby, která je mimo osu spojující atomy, jak znázorňuje obrázek.

### 7.4.3 Teploty v Klementině

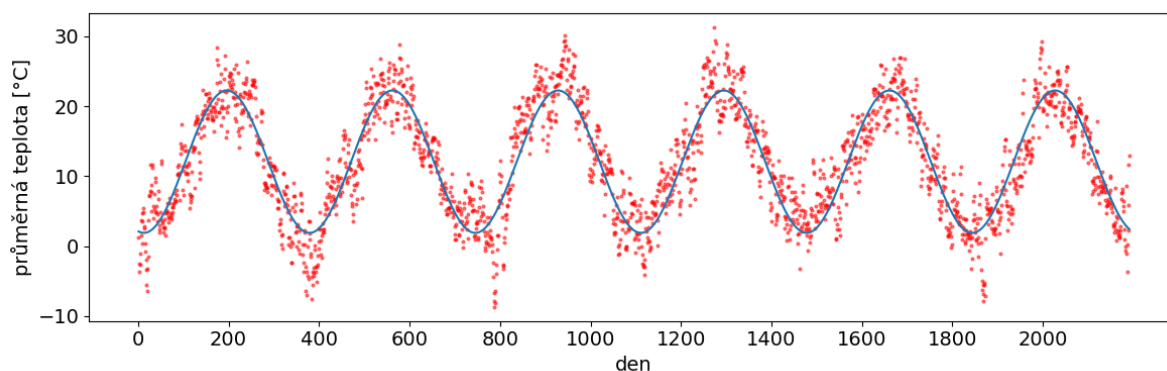
*Dora s Karlem kráčeli parným odpolednem a lízali zmrzlinu. Karel myslel na Doru a Dora myslela na globální oteplování. Karle, víš, že v Klementině se měří teploty už od roku 1775? Ano, to samozřejmě vím, odpověděl zkušeně Karel. Podívej, tady je graf průměrných denních teplot za posledních šest let. Myslíš, že by šlo přibližně říci, že teploty se v průběhu roku mění jako sinusovka?*

*Pokusíte se najít předpis pro funkci sinus, která by přibližně prokládala zobrazovaný graf (obr. 54)? Lze vůbec data proložit grafem funkce sinus?*

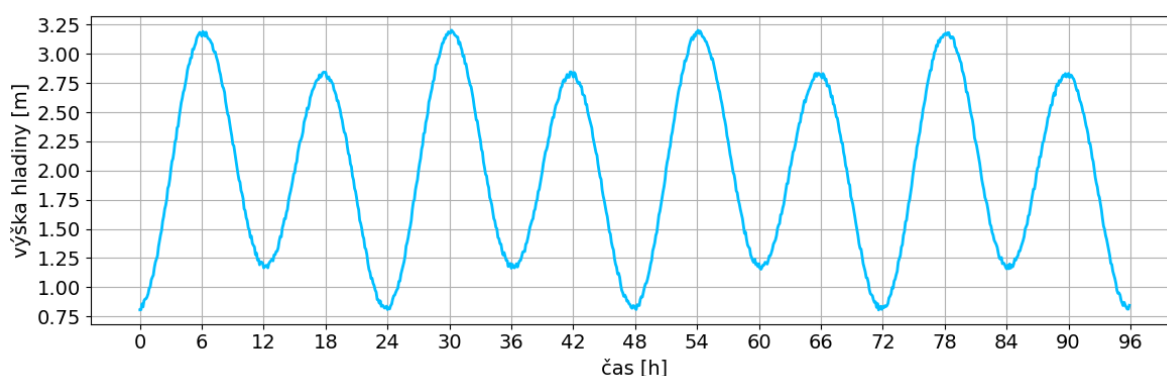
Od oka bychom přibližně mohli odhadnout předpis funkce sinus. Přesná analýza ukazuje, že předpis funkce, která nejlépe prokládá data, je

$$f(t) = 12,07 + 10,18 \cdot \sin\left(2\pi \frac{t - 104,3}{366,2}\right)$$

Vidíme však, že zobrazený graf funkce sinus prokládá experimentální data pouze s velkými výhradami. Podceňuje totiž letní maxima a zimní minima. Zobrazený graf 55 byl získán takzvaným *fitováním* pomocí *metody nejmenších čtverců*. To je technika, která se ve fyzice používá neustále. Obvykle se však svěří počítači. Doporučujeme vyhledat si podrobnosti.



Obrázek 55: Průměrné denní teploty v Klementinu v období od 1.1.2016 do 31.12.2021, proloženo funkcí sinus.



Obrázek 56: Výška hladiny v jistém přístavu ve státě Maine, USA.

#### 7.4.4 Příliv a odliv

*Splnil se Karlův sen! Tráví letní prázdniny s Dorou u moře. V červnu už se bál, že všechno pokazil, protože se zachoval jako pomatenec, ale Dora si toho našťestí asi ani nevšimla. Děkoval bohu, že s ní teď sedí na přístavním molu a nechávají si omývat nohy chladivým příbojem. Karle, víš, jak často přichází vysoká hladina při přílivu? Samozřejmě, že vím, jednou denně! Odvětil triumfálně Karel. Ne! Není to tak, asi jsi zase nějaký pomatený, jako tenkrát v červnu. . .*

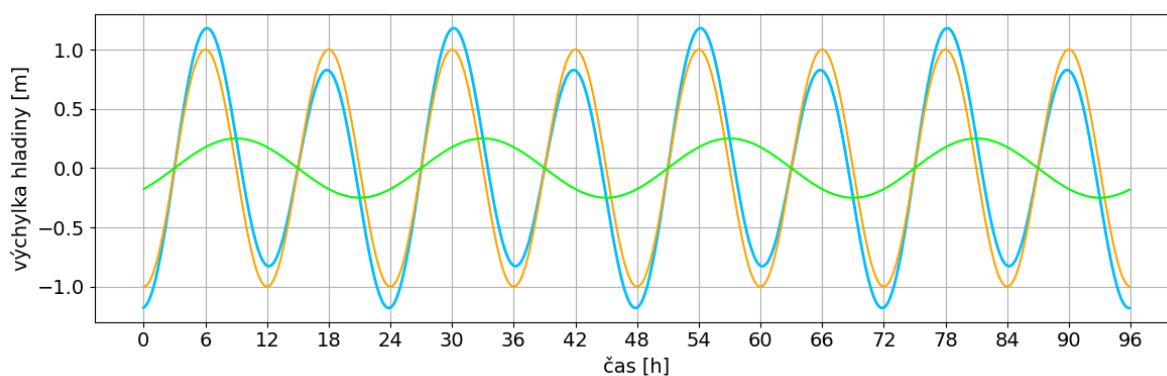
Námořníci a pracovníci přístavů nutně potřebují vědět, jaká kdy bude výška hladiny při přílivu a odlivu. Základní znalost praví, že příliv (vysoká hladina) se opakuje každých 12 hodin. Základní perioda 12 hodin je samozřejmě dána periodou otáčení Země kolem své osy. Proč není perioda přílivu 24 hodin? Vyboulení vody v důsledku přitažlivosti Měsíce je na obou protějších stranách zeměkoule, takže během jedné otočky dané místo na Zemi projde oběma vybouleními. Avšak není to tak, že by pokaždé byla výška přílivu stejná. Výšku přílivu ovlivňuje řada faktorů, zejména pak vzájemné postavení Země, Měsíce a Slunce. Aby bylo možné výšku přílivu předpovídat do budoucnosti, je potřeba zjistit, jakou matematickou funkcí  $y(t)$  je popsána. Pak za časovou proměnnou je možné dosadit i nějaký čas z budoucnosti a předpovědět tak výšku přílivu.

*Na obrázku 56 je zobrazena závislost výšky hladiny na čase ve čtyřech po sobě jdoucích dnech v přístavu ve státě Maine, USA. Pokuste se napsat matematický předpis funkce  $y(t)$ , která bude co nejlépe popisovat výšku hladiny.*

Střední výška hladiny je 2 m. Hlavní komponentou je zjevně kolísání s periodou 12 h, s amplitudou asi 1 metr. Maximum je však střídavě nižší a vyšší. Vyšší maxima jsou od sebe v intervalu 24 h. To naznačuje, že existuje druhá komponenta s nižší amplitudou (okolo čtvrt metru) a periodou 24 h. A skutečně, hlubší analýza by ukázala, že výška hladiny je popsána funkcí

$$y(t) = 2 + \sin\left(2\pi \frac{t-3}{12}\right) + 0,25 \sin\left(2\pi \frac{t-3}{24}\right)$$

Pokud byste se podívali na webové stránky <https://tidesandcurrents.noaa.gov/>, zjistili byste, že v každém sledovaném přístavu je výška hladiny popsána součtem několika desítek sinusovek, kde každá má svou amplitudu a periodu (obrázek 58).



Obrázek 57: Výchylna hladiny v jistém přístavu ve státě Maine, USA, rozklad do komponent.

Constituent #	Name	Amplitude	Phase	Speed	Description
1	M2	1.375	317.2	28.984104	Principal lunar semidiurnal constituent
2	S2	0.208	349.0	30.0	Principal solar semidiurnal constituent
3	N2	0.3	288.3	28.43973	Larger lunar elliptic semidiurnal constituent
4	K1	0.144	126.1	15.041069	Lunar diurnal constituent
5	M4	0.011	75.9	57.96821	Shallow water overtides of principal lunar constituent
6	O1	0.113	112.2	13.943035	Lunar diurnal constituent
7	M6	0.014	48.4	86.95232	Shallow water overtides of principal lunar constituent
8	MK3	0.004	12.1	44.025173	Shallow water terdiurnal

Obrázek 58: Několik prvních harmonických komponent (jednotlivé sinusovky) pro popis a předpovídání výšky přílivu v přístavu Portland, USA. <https://tidesandcurrents.noaa.gov/harcon.html?unit=0&timezone=1&id=8418150&name=Portland&state=ME>

*Je zajímavé, že harmonické komponenty (sinusovky) na webu tidesandcurrents nejsou charakterizovány periodou, nýbrž takzvanou rychlostí (speed) ve stupních za hodinu. Jedna z komponent má například rychlost 87° za hodinu. Jaký je předpis pro sinusovku popisující tuto komponentu?*

Je to jednoduché. Rychlost je vlastně úhlová rychlost, ovšem nikoli v radiánech, ale ve stupních. Předpis pro sinusovku pak je  $\sin(2\pi \frac{87}{360} t)$ .

Rozkládání různých komplikovaných funkcí jako součet mnoha sinusovek je ve fyzikální a technické praxi extrémně důležitý proces. Pokud se o tomto procesu budete chtít dozvědět víc, hledejte pojmy *Fourierovy řady*, *Fourierův rozklad*, či *Fourierova analýza*. Ač se to nezdá, tak s rozkladem do součtu sinusovek stojí a padá přenos zvuku i videa a jsou na něm například založeny i kompresní algoritmy pro obrázky. Ve fyzice jsou aplikace nedozírné, zejména v kvantové mechanice.

## 8 Závěr

Cílem práce bylo rozpracovat alternativní přístup k výuce goniometrických funkcí na střední škole z perspektivy fyzika a nabídnout jiný úhel pohledu na některá témata zejména učitelům, mezi jejichž aprobaci fyzika nepatří.

Výklad je fyzikálně motivován a naopak je upozaděna formální matematická stránka. Práce se snaží klást důraz na některé motivy, které jsou ve standardních učebnicích matematiky spíše na okraji. Věnuje se konceptům jako průmět, tok plochou či prudkost změny funkce. V tématu vlnění je čtenář seznámen s různými případy sčítání sinusovek, přičemž je využíván koncept fázoru. Je také zařazena kapitola o aproximacích goniometrických funkcí, které se ve fyzice hojně využívají. Důraz je kladen na pochopení souvislosti mezi otáčivým pohybem a křivkami sinus a kosinus. Domnívám se, že některá z těchto témat pro čtenáře mohou být inspirativní.

Tato práce není učebnicí, protože návaznost jednotlivých témat není zcela plynulá a některé pojmy a koncepty nejsou zavedeny či didakticky zpracovány. Přesto jsem se snažil text koncipovat tak, aby nahlížel na témata goniometrických funkcí jako na jednotný celek a tvořil postupný výklad srozumitelný i pro středoškolského studenta. Velká pozornost byla také věnována tvorbě vlastních ilustrací a vizuální komunikaci se čtenářem. Práce se zaměřuje spíše na vysvětlení principů než na procvičování látky.

Rozsah práce je vysoce nad běžným rozsahem závěrečných prací kurzu celoživotního vzdělávání. Vzhledem k tomu nejsou některá témata zpracována tak podrobně či precizně, jak by si možná zasloužila. K tématům by také bylo vhodné doplnit větší množství úloh na procvičení. Doplnění a didaktické vytříbení práce mohou být předmětem dalšího snažení již mimo rámec kurzu celoživotního vzdělávání.

Výčet témat použitých v práci není ani zdaleka úplný, avšak snaží se být do určité míry reprezentativní. Jistě by také bylo zajímavé hledat různé aplikace goniometrických funkcí i mimo fyziku, např. v jednoduchých populačních modelech nebo v ekonomických cyklech. To však přenechám jiným.

Mým celkovým dojmem z mnoha učebnic je, že postrádají jistou míru hravosti. Značné úsilí jsem proto věnoval zapojení beletristického prvku v podání vypravěčů Dory a Karla. Inspiraci jsem v tomto směru čerpal ze skvěle populárně naučné knihy *Pan Tompkins stále v říši divů*. Je na posouzení čtenáře, zda tento dějový a dialogický prvek působí spíše pozitivně nebo spíše rušivě. Jistě by toto propojení mohlo být provedeno mnohem lépe, nicméně se domnívám, že by podobná koncepce měla být v učebnicích a naučných knihách více prozkoumána.



## 9 Použitá literatura

- [1] Odvárko O.: Matematika pro gymnázia – Goniometrie, Prometheus, 2006
- [2] Odvárko O.: Matematika – Sběrka úloh pro gymnázia – Goniometrie, Prometheus, 2009
- [3] Zemek V.: Matematika pro střední školy 5.díl, Funkce II – učebnice, Didaktis, 2015
- [4] Kodejška Č., Ort J.: Matematika pro střední školy 5.díl, Funkce II – pracovní sešit, Didaktis, 2020
- [5] Kubáček Z.: Matematika pro 3.ročník gymnázia 2. část, Slovenské pedagogické nakladatel'stvo, 2013
- [6] Hanzlík F.: Goniometrické funkce ve fyzikálních aplikacích, Bakalářská práce, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, 2020
- [7] Smýkalová R.: Metody a užití goniometrických funkcí v elementární matematice, Dizertační práce, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita, 2011
- [8] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika, Vutium, Brno, 2006
- [9] Malý P.: Optika, Karolinum, Praha, 2008
- [10] Griffiths D.: Introduction to Quantum Mechanics, Cambridge University Press, 2016
- [11] Gamow G., Stannard R.: Pan Tompkins v říši divů, Aurora, 2001